Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

DINÂMICA DE SISTEMAS COMO APOIO AO ENSINO E APRENDIZAGEM DO CONCEITO INTUITIVO DE DERIVADAS E INTEGRAIS NO ENSINO MÉDIO

SYSTEM DYNAMICS TO SUPPORT THE TEACHING AND LEARNING OF THE INTUITIVE CONCEPT OF DERIVATIVES AND INTEGRALS IN HIGH SCHOOL

DINÁMICA DE SISTEMAS PARA APOYAR LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO INTUITIVO DE DERIVADAS E INTEGRALES EN LA ESCUELA SECUNDARIA

https://doi.org/10.56238/arev7n9-327

Data de submissão: 03/09/2025 **Data de publicação:** 03/10/2025

Fátima Aparecida Afonso Aguilar
Mestrado em Matemática
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ)
E-mail: fatimafonso@gmail.com
Orcid: https://orcid.org/0009-0000-4794-1703
Lattes: http://lattes.cnpq.br/3736890008916729

José Angel Dávalos Chuquipoma
Doutor em Matemática
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ)
E-mail: jadc13@ufsj.edu.br
Orcid: https://orcid.org/0000-0001-5424-1414
Lattes: http://lattes.cnpq.br/5037396649398929

RESUMO
Este artigo tem como objetivo principal, aplicar a Dinâmica de Sistemas como ferramenta de ensino dos conceitos intuitivos de derivada e integral de funções, em um nível do Ensino Médio. Usando a dinâmica de estoque e fluxos, conjeturamos que é possível representar de forma didática a ideia intuitiva por trás desses conceitos. Através dos processos de diferenciação e integração gráfica, preparamos o caminho para o entendimento de taxas de variação e acúmulo de grandezas. A contribuição dessa abordagem dos conceitos de derivada e integral via estoques e fluxos, também permite entender, de forma intuitiva, como alguns modelos definidos por equações diferenciais são obtidos. Usando o software de simulação computacional Vensim-PLE, de uso livre na sua versão educacional, interpretamos os diagramas causais e diagramas de estoque e fluxo da Dinâmica de Sistemas. A pesquisa teve abordagem qualitativa e fundamentou-se nos princípios da Dinâmica de Sistemas e no uso do software Vensim. Por fim, uma proposta de sequência didática é apresentada com o intuito de abordar esses conceitos e auxiliar na formação inicial e continuada de professores da Educação Básica.

Palavras-chave: Diagrama Causal. Diagrama de Estoque e Fluxo. Processo de Integração e Diferenciação Gráfica. Vensim-PLE.

ABSTRACT
The main objective of this article is to apply System Dynamics as a teaching tool for the intuitive concepts of derivatives and integrals of functions at the high school level. Using stock and flow

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

dynamics, we hypothesize that it is possible to didactically represent the intuitive idea behind these concepts. Through the processes of differentiation and graphical integration, we pave the way for understanding rates of change and accumulation of quantities. The contribution of this approach to the concepts of derivatives and integrals via stocks and flows also allows for an intuitive understanding of how some models defined by differential equations are obtained. Using the free-to-use computer simulation software Vensim-PLE, an educational version, we interpreted the causal diagrams and stock and flow diagrams of System Dynamics. The research adopted a qualitative approach and was based on the principles of System Dynamics and the use of Vensim software. Finally, a proposed teaching sequence is presented to address these concepts and support the initial and continuing education of elementary school teachers.

Keywords: Causal Diagram. Stock and Flow Diagram. Graphical Integration and Differentiation Process. Vensim-PLE.

RESUMEN
El objetivo principal de este artículo es aplicar la Dinámica de Sistemas como herramienta didáctica para los conceptos intuitivos de derivadas e integrales de funciones en el nivel secundario. Utilizando la dinámica de stock y flujo, planteamos la hipótesis de que es posible representar didácticamente la idea intuitiva que subyace a estos conceptos. Mediante los procesos de diferenciación e integración gráfica, facilitamos la comprensión de las tasas de cambio y la acumulación de cantidades. La contribución de este enfoque a los conceptos de derivadas e integrales mediante stocks y flujos también permite una comprensión intuitiva de cómo se obtienen algunos modelos definidos por ecuaciones diferenciales. Utilizando el software de simulación computacional gratuito Vensim-PLE, una versión educativa, interpretamos los diagramas causales y de stock y flujo de la Dinámica de Sistemas. La investigación adoptó un enfoque cualitativo y se basó en los principios de la Dinámica de Sistemas y el uso del software Vensim. Finalmente, se presenta una secuencia didáctica propuesta para abordar estos conceptos y apoyar la formación inicial y continua del profesorado de primaria.

Palabras clave: Diagrama Causal. Diagrama de Stock y Flujo. Proceso de Integración Gráfica y Diferenciación. Vensim-PLE.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho é um recorte de uma pesquisa de mestrado desenvolvido no PROFMAT/UFSJ/CSA, que surgiu a partir da investigação sobre o uso das tecnologias digitais na área de Matemática, com o objetivo de oferecer suporte, especificamente, o conceito intuitivo de derivada e integral de funções em um contexto escolar. Como é de conhecimento, as taxas de variação e o acúmulo de grandezas que evoluem no tempo são interpretados, respectivamente, pelos conceitos matemáticos de derivada e integral de funções. No entanto, essas definições não são abordadas no Ensino Médio, o que representa um desafio na busca por metodologias que forneçam conhecimento didático sobre o tema.

Segundo Ávila (2006), "o conceito de derivada pode ser ensinado, com grande vantagem, logo na primeira série do segundo grau, ao lado do ensino de funções". Em relação ao ensino de integrais, alguns autores, propõem citar a ideia fundamental por trás do conceito de integral, através de exemplos do cotidiano. Assim, conforme ressalta Machado (2008, p. 3):

> "Para calcular a área sob gráficos, podemos raciocinar da seguinte maneira: vamos o intervalo considerado em muitos pequenos intervalos, suficientemente pequenos [...]. Assim, em cada um dos pequenos intervalos, uma fatia de área que buscamos pode ser calculada como se fosse um pequeno retângulo; depois, para se ter a área procurada, basta somar as áreas de todos os retangulinhos". (Machado, 2008, p. 3)

Nesse sentido, o conceito de integral além de estar relacionado com a área de figuras planas, nesta pesquisa, o relacionaremos com a ideia intuitiva de estoque ou acúmulo, presente na dinâmica de grandezas físicas. Cabe ressaltar que a escolha desses tópicos não é aleatória; além dos altos índices de reprovações e evasões no ensino superior, esses conceitos são fundamentais para a compreensão de fenômenos naturais e tecnológicos nas diversas áreas do conhecimento.

Diante disso, o objetivo principal deste artigo é oferecer a alunos e professores, uma metodologia de fácil manuseio e aplicação para a modelagem de processos evolutivos interpretados por derivadas e integrais, sem o uso do rigor matemático. Dessa forma, propomos o uso da metodologia da Dinâmica de Sistemas (DS) como uma alternativa de ensino que não se baseia nas definições e propriedades de derivadas e integrais, e sim, na ideia intuitiva por trás desses conceitos. Essa abordagem, abre a possibilidade de que os alunos criem e desenvolvam seus próprios modelos, facilitando o entendimento de processos de crescimento definidos por funções linear, exponencial, logarítmica, temas amplamente explorados nesse nível de ensino. A vantagem é que essa metodologia pode ser aplicada a partir do nono ano do Ensino Fundamental II e pode ser estendida até o terceiro ano do Ensino Médio, explorando o estudo das funções destacadas.

A DS ou *System Dynamics* (SD), em inglês, é uma metodologia que permite entender, interpretar e discernir, questões e problemas com certo grau de dificuldade. Também, é usada como técnica de modelagem matemática para interpretar problemas que envolvem o crescimento ou decrescimento de diversas grandezas. Originalmente desenvolvido pelo Professor Jay Forrester do *Massachusetts Institute of Technology* (IMT) em meados da década de 1950, com o intuito de auxiliar os gerentes de empresas a otimizar a boa gestão dos processos industriais, (FORRESTER, 1961).

A simulação computacional dos elementos que conformam a metodologia da DS, é complementada com auxílio do software computacional Vensim. Esta ferramenta computacional permite ao usuário criar modelos gráficos de forma intuitiva e interativa, facilitando a visualização das relações entre os diferentes componentes de um sistema como a criação de diagramas causais e de estoque e fluxo, tornando mais fácil entender e estabelecer as relações entre variáveis. Disponibilizado de forma gratuita na sua versão educacional Vensim-PLE (https://https://vensim.com/), é possível realizar simulações que exploram o comportamento de sistemas complexos ao longo do tempo, possibilitando uma análise aprofundada das dinâmicas envolvidas. O software, possui uma interface acessível que facilita a criação de gráficos e tabelas, e ainda, coloca em prática, as etapas do processo da modelagem matemática em alunos do Ensino Médio, facilitando a familiarização na iniciação científica (BASSANEZI, 2007).

Nossa experiência com a DS vai desde o desenvolvimento de projetos de iniciação científica em um nível de Ensino Médio, passando por propostas didáticas em trabalhos de dissertação com discentes do Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT, até o desenvolvimento de atividades em parceria com professores da Educação Básica.

Diante do exposto, o principal objetivo da pesquisa é propor uma reflexão sobre o uso da DS como ferramenta metodológica e como uma alternativa de modelagem ativa para o ensino de matemática na educação básica e de forma particular, nos conceitos intuitivos de derivada e integral. Dessa forma, pretendemos contribuir para a redução do distanciamento entre o ensino de derivadas e integrais nas escolas e a graduação, visando aproximar diversos conteúdos de unidades curriculares e diminuir os índices de evasão e reprovação no ensino superior, promovendo, assim, a troca de conhecimentos entre diferentes níveis de ensino.

Para consolidar a metodologia da DS, propomos uma sequência didática estruturada em torno de atividades práticas e interativas, utilizando ferramentas tecnológicas e recursos visuais para ilustrar a aplicação de estoques e fluxos. Espera-se que, ao vivenciar a matemática de forma mais concreta e visual, os alunos desenvolvam um interesse genuíno pelas ciências exatas e considerem seguir carreiras nessas áreas. Além disso, a presente dissertação discutirá a importância de uma abordagem pedagógica

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

que valorize a curiosidade e a criatividade dos estudantes, promovendo um ambiente de aprendizado inclusivo e motivador. A implementação dessa sequência didática será avaliada por meio de estudos de caso e feedback dos alunos, visando aperfeiçoar continuamente as estratégias de ensino e maximizar o impacto educacional. A avaliação incluirá a análise de desempenho acadêmico, bem como a percepção dos alunos sobre a relevância e a aplicabilidade dos conceitos aprendidos.

2 METODOLOGIA

A pesquisa teve abordagem qualitativa de natureza exploratória e fundamentou-se nos princípios da Dinâmica de Sistemas, voltada à área de Ensino de Ciências no Ensino Médio. A investigação tem como foco compreender como o uso das tecnologias educativas, especificamente o software Vensim, pode influenciar, primeiro, na aprendizagem conceitual e pensamento crítico de estudantes na construção de modelos, e segundo, estabelecer os primeiros passos de ensino do conceito intuitivo de derivadas e integrais, através de uma proposta didática.

O desenvolvimento da metodologia, foi organizada em três etapas: análise dos livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio, disponibilizados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2021; busca por publicações científicas acerca de Dinâmica de Sistemas; e elaboração da sequência didática para o ensino do conceito intuitivo de derivadas e integrais em num nível de Ensino Médio. Para esclarecer os resultados da metodologia, utilizamos o software livre e gratuito Vensim, no qual são apresentadas atividades em que os alunos, por meio de orientações e questionamentos, possam construir relações e desenvolver habilidades relacionadas às representações gráficas de estoque e fluxo.

Dessa maneira, visamos auxiliar docentes de Matemática na ampliação em sala de aula deste tópico, considerando que as informações do PNLD, que maiormente são a única fonte de consulta de professores e alunos, não apresentam o tema. Assim, construímos brevemente a estrutura da sequência didática, apresentando a DS, seus elementos que a fundamentaram e os objetivos que nortearam sua elaboração. Como pesquisa futura, pretendemos aplicar a sequência didática para verificar suas potencialidades.

2.1 DINÂMICA DE SISTEMAS: UM ENFOQUE NO ENSINO MÉDIO

No contexto histórico, a DS foi fundamentada inicialmente nos estudos de Jay Forrester, sobre suas pesquisas em políticas sociais e empresariais (FORRESTER, 1961), e posteriormente, nas contribuições de diversos pesquisadores como John D. Sterman (STERMAN, 2000), Peter Senge (SENGE, 1990), entre outros. A DS é uma *abordagem voltada para a compreensão do comportamento* *de sistemas complexos que evoluem ao longo do tempo* usando simulação de computador. A metodologia da DS concentra-se na *análise de ciclos de retroalimentação (feedback) interna entre as variáveis e dos atrasos que impactam o comportamento do sistema como um todo*. Um *sistema* é definido como um conjunto de elementos, regras ou componentes que interagem entre si para alcançar um objetivo específico. Com base nesse contexto, pode-se afirmar que a DS permite identificar essas interações, analisá-las e contribuir para a tomada de decisões voltadas à melhoria do desempenho do sistema, (STERMAN, 2000).

A diferença no uso da DS com outras abordagens no estudo de sistemas complexos, é a utilização de ciclo de retroalimentação (feedback) e estoque e fluxos, elementos principais da metodologia que ajudam a descrever como sistemas que evoluem no tempo mostram características complexas (não lineares).

Peter Senge, orientado por Jay Forrester na Stanford University, percebeu que era necessário formalizar a aplicação da DS. Assim, em 1990, Senge introduziu o conceito de pensamento sistêmico e o de organizações que aprendem, enfatizando a importância de entender uma organização como um sistema integrado. Para Senge, *o pensamento sistêmico envolve a análise e a compreensão das forças e inter-relações que moldam o comportamento dos sistemas*, (SENGE, 1990). O pensamento sistêmico é uma forma de **descrever e compreender** a causalidade e as inter-relações entre variáveis dentro de um sistema. A DS analisa o impacto dessas interações e o **quantifica através da simulação computacional (**MIT System Dynamics in Education Project (SDEP)»).

A seguir introduzimos os conceitos, definições que conformam a DS.

Definição 1 (Modelo Causal). Um modelo causal é um modelo matemático que descreve como as variáveis ou eventos presentes no modelo se relacionam entre si, com o objetivo de explicar a causa e efeito entre elas.

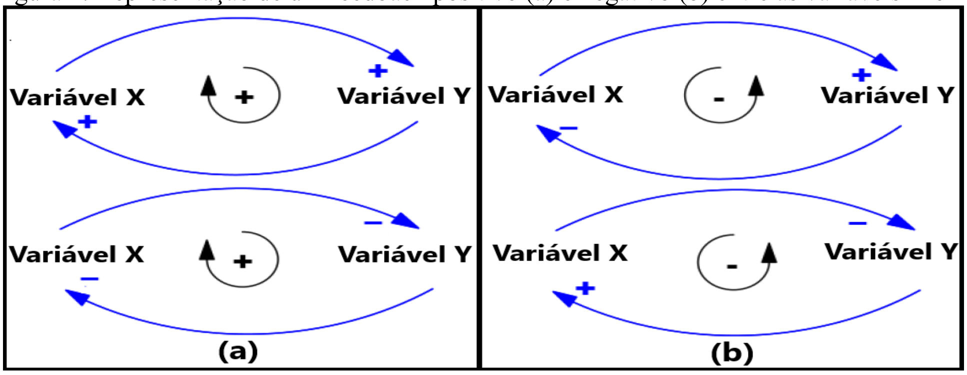
Um modelo causal tenta responder por que algo acontece, ao invés de apenas descrever o que acontece. O modelo causal representa como uma variável (a causa) influencia outra variável (o efeito). De acordo com Sterman (2000), a DS permite a construção de gráficos de relações causais onde se procura delimitar e pesquisar quais as relações de causa e efeito (qualitativo) que existem entre os elementos de um sistema.

Definição 2 (Relação Causal Positiva e Negativa). Uma variável X influência na variável Y de forma *positiva* (relação causal positiva), se X cresce, então Y cresce, ou, se X decresce, então Y também decresce. Uma variável X influência na variável Y de forma *negativa* (relação causal negativa), se X aumenta, então Y diminui, ou, se X diminui, então Y aumenta.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Definição 3 (Feedback positivo e negativo). Um ciclo de feedback (realimentação) entre as variáveis X e Y é *positivo*; se as relações causais de X sobre Y e de Y sobre X for positiva; ou, se as relações causais de X sobre Y e de Y e X for negativa. Um ciclo de feedback (realimentação) entre as variáveis X e Y é *negativa*; se as relações causais de X sobre Y e de Y sobre X for negativa e positiva, respectivamente; ou, reciprocamente, se as relações causais de X sobre Y e de Y e X for positiva e negativa, respectivamente. Na Figura 1 temos uma interpretação gráfica do conceito de feedback positivo e negativo.

Figura 1. Representação de um feedback positivo (a) e negativo (b) entre as variáveis X e Y.



Fonte: Os autores.

Com os modelos causais podemos deduzir a tendência de crescimento ou decrescimento das variáveis e o que ainda, é mais importante, ter uma ideia do comportamento da dinâmica do problema. Um Ciclo de realimentação positiva equivale a tendência de crescimento (ou decrescimento). Um Ciclo de realimentação negativa equivale a tendência à estabilidade (não cresce, nem decresce). As relações causais são facilitadores no ensino e aprendizagem de modelos matemáticos, com ajuda do pensamento sistêmico, desenvolve nos alunos a capacidade de pensar, analisar e criar seus próprios modelos, tornando eficaz a pesquisa nas organizações que aprendem, como é o caso do Ensino Médio, (KUBICEK, 2011).

Definição 4 (Estoque). Estoque ou variável de nível, é um elemento da Dinâmica de Sistemas que interpreta as variáveis que acumula um estado específico em um determinado momento. Representam as caraterísticas quantitativas do modelo.

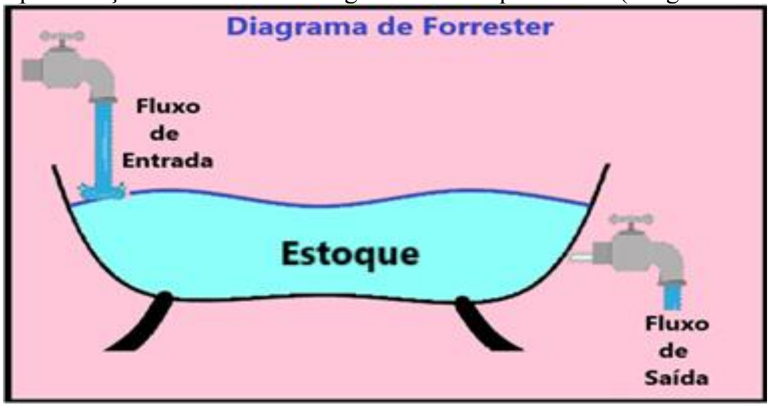
O estoque representa alguma grandeza que se vai acumulando ao longo do tempo e podem ser bens tangíveis (materiais), ou bens intangíveis (informações). Por exemplo, a população de indivíduos em um ano, ou o número de funcionários em uma empresa, a quantidade de produtos produzidos em uma empresa, etc.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Definição 5 (Fluxo). O fluxo é um elemento da Dinâmica de Sistemas que representa as mudanças de uma grandeza ou estado, em relação a um período de tempo.

Para interpretar a dinâmica de estoque e fluxo, parte crucial da DS, Forrester (1961), ilustra uma representação metafórica de um sistema de estoque e fluxo (diagrama de estoque e fluxo). O acúmulo ou estoque de água no reservatório é preenchido pela entrada e drenado pela saída, não existindo retardos de tempo, nem realimentações, veja a Figura 2. O fluxo de água ingressa em uma determinada taxa e sai em outra taxa, a diferença dessas taxas permite estimar a trajetória do estoque sem uso de cálculos matemáticos, e sim, através de simples cálculos aritméticos.

Figura 2. Representação metafórica do Diagrama de estoque e fluxo (Diagrama de Forrester).

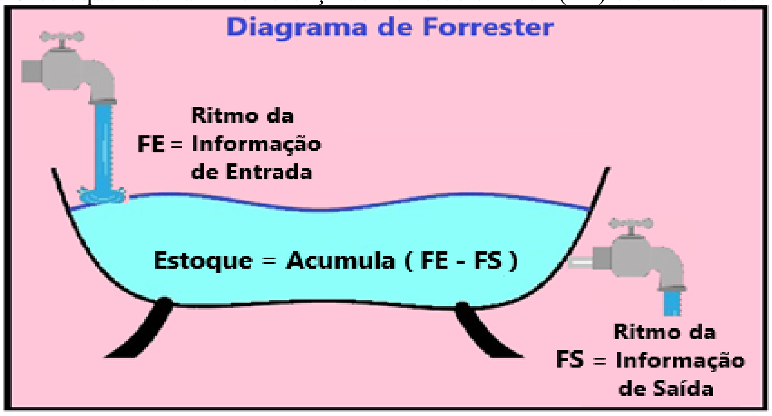


Fonte: Os autores.

O acúmulo ou estoque de água no reservatório é preenchido pela entrada e drenado pela saída, não existindo retardos de tempo, nem realimentações. O fluxo de água ingressa em uma determinada taxa (ritmo por unidade de tempo) e sai em outra taxa, a diferença dessas taxas permite estimar a trajetória do estoque sem uso de cálculos matemáticos, e sim, através de simples cálculos aritméticos. O fluxo causa a variação no estoque, ou seja, faz com que um estoque aumente ou diminua, isto é, o fluxo alimenta o estoque. Os estoques presentes em uma dinâmica variam de valor em função dos fluxos de entrada e saída. Por exemplo, nascimentos, mortalidade ou migrações, etc. A DS aborda o estudo da evolução dos modelos através dos estoques, fluxos e ciclos de retroalimentação. A Figura 3 representa uma adaptação da metáfora para o caso em que a agua é interpretada como a informação de alguma grandeza. Observe a importância da similitude da metáfora detrás dos modelos de estoques e fluxo, isso permite introduzir para alunos do Ensino Médio, uma ideia intuitiva dos conceitos matemáticos de derivada e integral presentes no Cálculo, objetivo principal de nossa pesquisa.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

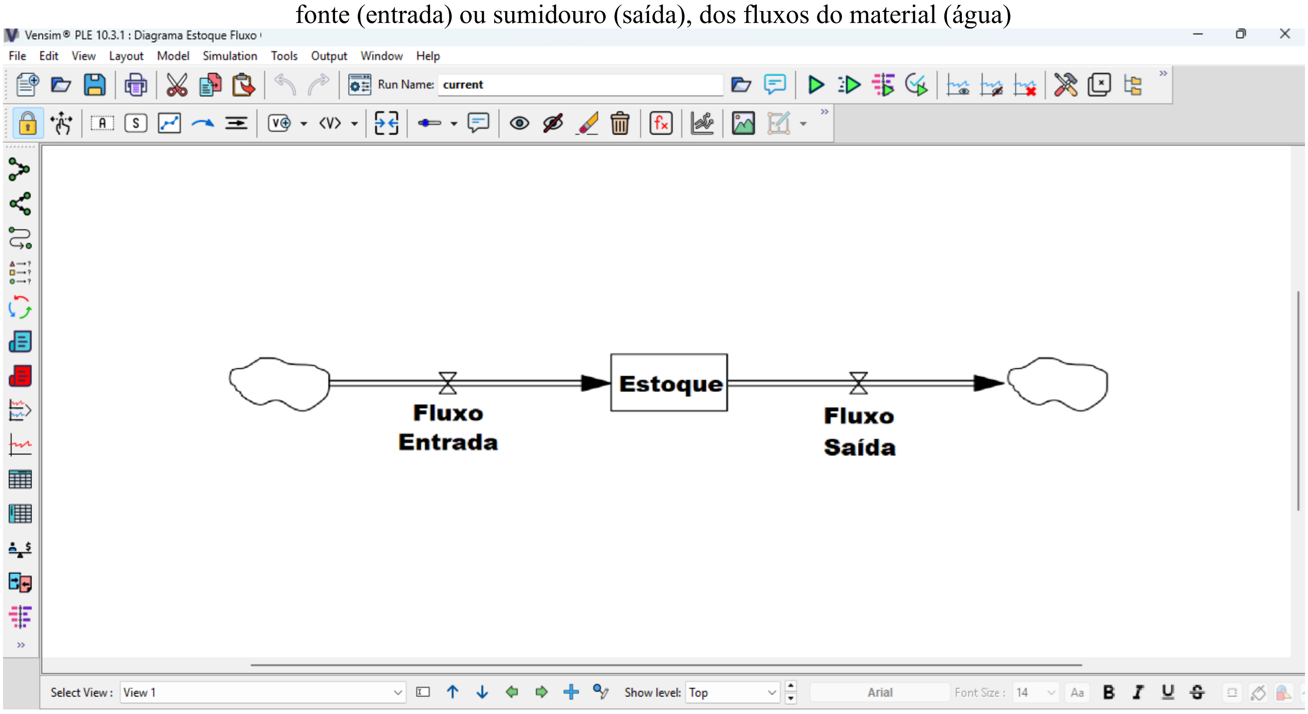
Figura 3. O estoque acumula a diferença do fluxo de entrada (FE) e o fluxo de saída (FS).



Fonte: Os autores.

Os modelos de estoque e fluxo expressam as relações quantitativas entre as variáveis por meio de fórmulas matemáticas, que por sua vez, interpretam o raciocínio lógico presente no modelo. Os níveis ou estoques mudam de valor porque possuem fluxos de entradas e saídas, essa ideia fundamental servirá de base para interpretar a construção de modelos utilizando a ferramenta computacional Vensim que veremos a seguir. A Figura 4 mostra a janela do software Vensim e suas funcionalidades, nele vemos, por exemplo a implementação do diagrama de estoque e fluxo.

Figura 4. Diagrama de estoque e fluxo (Diagrama de Forrester) realizado no software Vensim. A nuvem representa uma fonte (entrada) ou sumidouro (saída), dos fluxos do material (água)



Fonte: Os autores.

2.2 REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DE ESTOQUES E FLUXOS

Definida uma dinâmica de fluxos em um determinado sistema, é pertinente perguntar: qual é o comportamento do estoque? Reciprocamente, definida uma dinâmica do estoque, como podemos inferir o comportamento dos fluxos? Do cálculo diferencial e integral, é conhecido que essas questões são respectivamente, equivalentes a integrar os fluxos (derivada) para gerar o estoque (integral) e diferenciar o estoque para produzir sua taxa de variação líquida (derivada).

Esses conceitos podem ser desafiadores para pessoas que nunca estudaram cálculo, como é o caso de um aluno do Ensino Médio. De fato, relacionar a dinâmica de estoques e fluxos com integrais e derivadas, resulta ser bastante intuitivo para explorar os conhecimentos desses conceitos. Dessa forma, o Diagrama de Forrester representando o diagrama de estoque e fluxo através da metáfora da água ingressando no reservatório mostrado na Figura 3, fornece uma compreensão didática muito fértil a ser explorada em um nível de Ensino Médio. Por outro lado, o estudo do cálculo envolve o uso de notações desconhecidas nessa fase de ensino e foca em soluções analíticas, o que dificulta o aprendizado.

Nesse contexto, independentemente do nível de conhecimento matemático, o objetivo desta seção é apresentar a metodologia da DS, e em particular, os processos de integração e diferenciação gráfica como uma forma de compreender o conceito intuitivo de integral e derivada, sem o uso das técnicas formais de integração e diferenciação. O leitor com maior domínio da matemática pode considerar este tema direto, mas ainda assim deve realizar os exemplos e desafios de integração e diferenciação gráfica para assegurar que sua compreensão intuitiva seja tão sólida quanto seu conhecimento técnico. Inicialmente, não importa quão grande ou pequena seja sua experiência acadêmica em matemática; o essencial é ter a capacidade de relacionar o comportamento de estoques e fluxos de forma intuitiva, utilizando gráficos e outras ferramentas não matemáticas.

De acordo com Sterman (2000), o diagrama de estoque e fluxo de Forrester interpreta a DS usando os conceitos matemáticos de derivada e integral. Mais explicitamente, se definimos os elementos da DS: Fluxo de Entrada (FE (t)), Fluxo de Saída (FS (t)), Fluxo total (FE (t) - FS (t)) e Estoque (E(t)) como funções do tempo t, *o estoque acumula (integra) seu fluxo total*. Reciprocamente, desde essa perspectiva resulta evidente que *o fluxo total representa o ritmo (taxa) de variação instantânea dos estoques*. Para fines didáticos, é aconselhável realizar as seguintes notações.

2.2.1 Notação para o Estoque

O estoque (processo de acumulação) será representado com a notação **INTEGRAL (· ,·)**:

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

$$\text{E}\ (t) = \textbf{INTEGRAL}\ (\text{FE}\ (t) - \text{FS}\ (t)\ ,\ E(t_0)). \qquad (1)$$

A notação **INTEGRAL (· ,·)** em (1) representa o conceito intuitivo de que o estoque acumula suas entradas menos suas saídas, começando com um valor inicial de $E(t_0)$.

Notação para o Fluxo

O fluxo total será denotado por **DERIVADA (·):**

$$\text{FE}\ (t) - \text{FS}\ (t) = \textbf{DERIVADA}\ (\boldsymbol{t}). \qquad (2)$$

A notação **DERIVADA (·)** em (2) representa o conceito intuitivo de que o fluxo total representa o ritmo (taxa) de variação instantânea do estoque.

O leitor familiarizado com o cálculo diferencial e integral conseguirá relacionar o conceito intuitivo de derivada e integral com a DS de estoques e fluxos. Acreditamos que com as notações em (1) e (2) podemos familiarizar o aluno do Ensino Médio com as seguintes interpretações.

$$E(t) = \int_{t_0}^{t} [FE\ (s) - FS\ (s)]ds + E(t_0). \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dt}\big(E(t)\big) = FE\ (t) - FS\ (t). \qquad (4)$$

2.3 INTEGRAÇÃO E DIFERENCIAÇÃO GRÁFICA

Baseando-se na teoria da DS e no contexto da dinâmica de estoque e fluxo introduzido por Forrester, nesta seção apresentaremos os processos de integração e diferenciação gráfica.

Definição 6 (Integração Gráfica). A integração gráfica é o processo que relaciona a dinâmica de estoques e fluxos a partir do gráfico do fluxo, de tal forma que conhecendo o comportamento dos fluxos é possível estimar o comportamento do estoque.

Observação 1.

- Os estoques acumulam ou integram seu fluxo total. A quantidade adicionada a um estoque em qualquer intervalo de tempo resulta ser a área delimitada pelo gráfico da taxa líquida, entre o início e o fim do intervalo.
- O valor final do estoque é o valor inicial mais a área sob a curva da taxa total entre os tempos inicial e final.

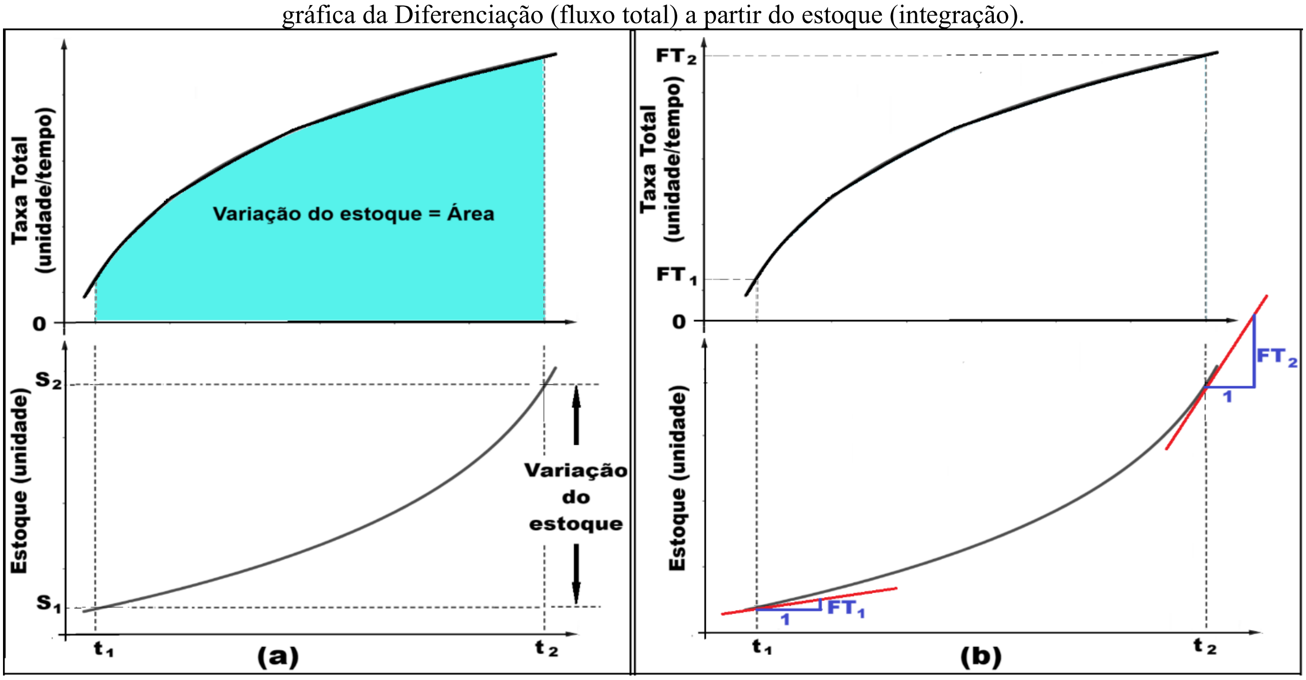
Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Definição 7 (Diferenciação Gráfica). A diferenciação gráfica é o processo que relaciona a dinâmica de estoques e fluxos a partir do gráfico do estoque, de tal forma que conhecendo o comportamento dos estoques é possível prever o comportamento do fluxo total.

Observação 2.

- O processo de diferenciação gráfica é o cálculo do fluxo total de variação de um estoque a partir de sua trajetória.
- A inclinação de uma linha tangente a qualquer ponto da trajetória do estoque é igual ao fluxo total de variação do estoque naquele ponto. A inclinação da trajetória do estoque é a derivada do estoque.

Figura 5. (a) Representação gráfica da Integração (estoque) a partir do fluxo total (diferenciação). (b) Representação gráfica da Diferenciação (fluxo total) a partir do estoque (integração).



Fonte: Os autores.

Observação 3. Os estoques acumulam ou integram seu fluxo total. Os fluxos representam as taxas de variação do estoque.

2.3.1 Etapas do Processo de Integração Gráfica

De acordo a Sterman (2000), o processo de Integração Gráfica obedece as seguintes etapas:

1. Calcule e represente graficamente o fluxo total de entrada e o fluxo total de saída no estoque.
2. Calcule e represente graficamente o fluxo total de variação do estoque.
3. Faça um conjunto de eixos para representar graficamente o estoque. Os estoques e seus fluxos têm diferentes unidades de medida (se um estoque é medido em unidades, seus fluxos são

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

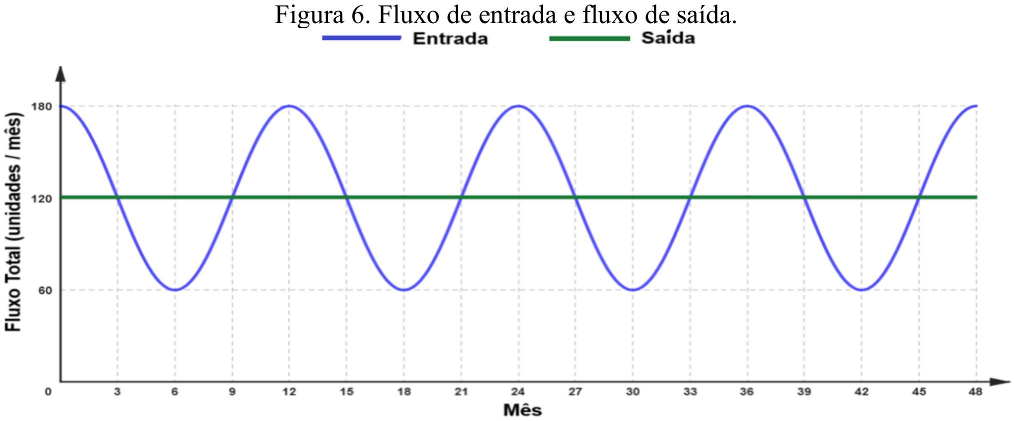
medidos em unidades por período de tempo). Portanto, os estoques e seus fluxos devem ser representados graficamente em escalas separadas. Faça um gráfico separado para o estoque sob o gráfico dos fluxos, com os eixos de tempo alinhados.

4. Trace o valor inicial do estoque no gráfico de estoques. O valor inicial deve ser especificado; não pode ser inferido a partir do fluxo total.
5. Divida o fluxo total em intervalos com o mesmo comportamento e calcule o valor adicionado ao estoque durante o intervalo.
6. Esboce a trajetória do estoque entre o início e o final de cada segmento. Encontre o valor do fluxo total no início do segmento. É positivo ou negativo? Se o fluxo total for positivo, o estoque será crescente durante esse tempo. Se o fluxo total for negativo, o estoque será decrescente.
7. Sempre que o fluxo total é zero, o estoque permanece inalterado. Certifique-se de que seu gráfico do estoque não mostre nenhuma mudança no estoque em todos os lugares em que o fluxo total de variação é zero. Se o fluxo total é zero durante algum intervalo, o estoque permanece constante em qualquer valor que tinha quando o fluxo total se tornou zero.
8. Repita as etapas 5 a 7 até terminar.

Para ilustrar o processo de integração gráfica, consideraremos o sistema mais básico de estoque e fluxo: aquele composto por um único estoque com uma entrada e uma saída. No caso do processo de diferenciação gráfica, utilizaremos um exemplo em que o estoque é definido pelas vendas de um determinado produto.

Exemplo 1. Considere os fluxos especificados na Figura 6. A saída é constante em 120 unidades/mês, se o valor inicial do estoque é de 600 unidades, use o processo de integração gráfica para encontrar o estoque da dinâmica do sistema.

Figura 6. Fluxo de entrada e fluxo de saída.



Fonte: Os autores.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Solução: Analisamos os fluxos apresentados na Figura 6. A saída é constante em 120 unidades/mês, mas a entrada flutua em torno de uma média de 120 com período de 12 meses e amplitude de ±60 unidades/mês. No início, a entrada está no seu máximo. Como a vazão de saída é constante, o fluxo total é uma flutuação com amplitude ±60 unidades/mês e média zero. No **intervalo [0,3]**, o estoque inicia com seu valor inicial de 600 unidades, mas como a entrada está no máximo, o estoque inicialmente sobe com uma inclinação de 60 unidades/mês. Contudo, o fluxo total cai durante os primeiros três meses, pelo que o estoque aumenta a uma taxa decrescente. No terceiro mês, o fluxo total chega a zero e depois torna-se negativo. O estoque deve portanto atingir um máximo no terceiro mês. A *quantidade adicionada em relação ao estoque nos primeiros 3 meses é a área sob a curva do fluxo total*. Não é fácil estimar a área do gráfico pois a curva da taxa de variação total está sempre mudando. Uma simulação da área mostra que pouco menos de 120 unidades são acrescentadas ao estoque, no momento em que o fluxo total cai para zero no terceiro mês.

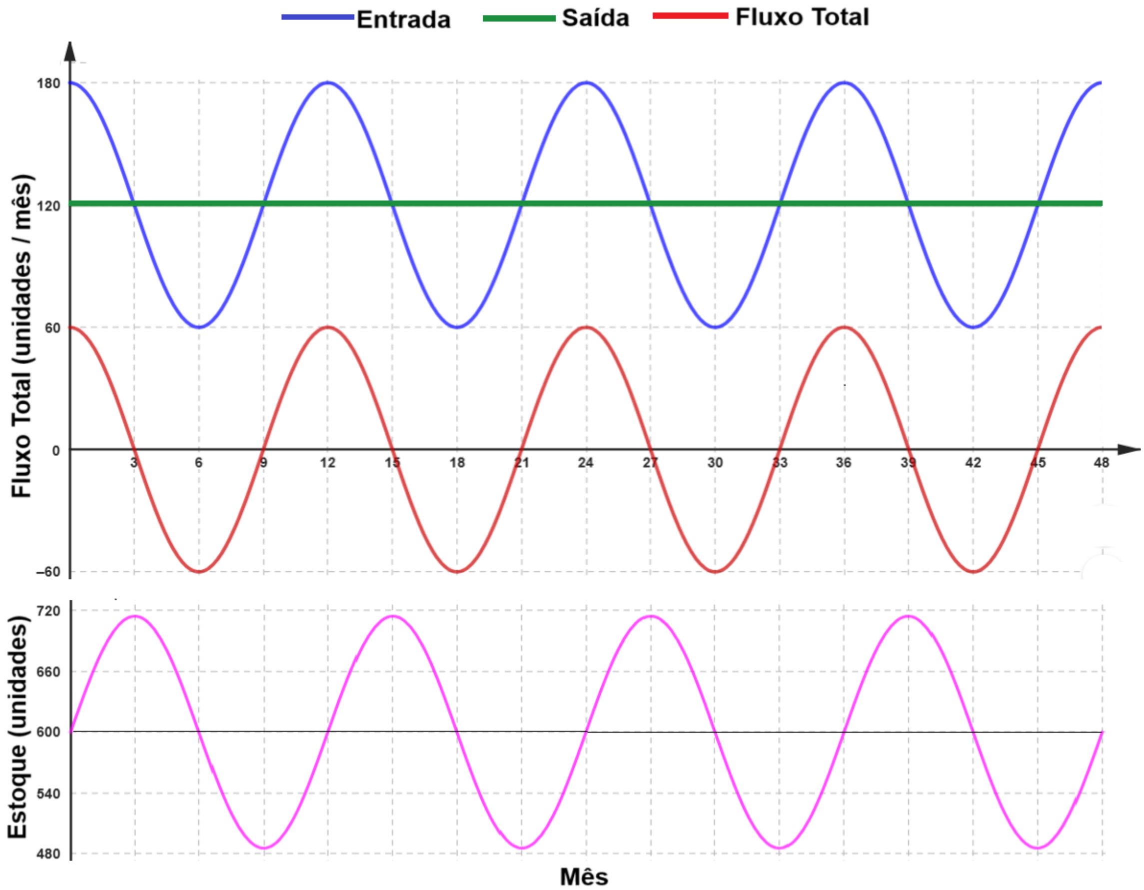
No **intervalo [3,6]**, o fluxo total é negativo, portanto, o estoque está caindo. Logo após o terceiro mês, o fluxo total é ligeiramente negativo, então *a taxa de declínio do estoque é leve*. No entanto, a magnitude do fluxo total aumenta, fazendo com que o *estoque caia a uma taxa crescente*. No início do sexto mês, o fluxo total atinge seu valor mínimo (a maior parte negativa), de -60 unidades/mês. O estoque está caindo à sua taxa máxima, e há um ponto de inflexão na trajetória do estoque no mês 6.

Quanto o estoque perdeu entre o mês 3 e o mês 6? Assumindo que a flutuação da taxa líquida é simétrica, a perda apenas equilibrou o que foi ganho nos primeiros 3 meses, reduzindo o estoque de volta ao seu nível inicial de 600 unidades. No **intervalo [6,9]**, o fluxo total permanece negativo, então *o estoque continua a cair, mas agora a uma taxa decrescente*. No nono mês, o fluxo total chega novamente a zero, fazendo com que *o estoque para de cair e atinge seu mínimo*. Utilizando novamente o pressuposto de simetria, a quantidade perdida entre os meses 6 a 9 é igual à quantidade perdida dos meses 3 a 6, o que faz o estoque cair para um nível ligeiramente acima de 480 unidades. No **intervalo [9,12]**, o fluxo líquido é positivo, portanto *o estoque está subindo*. Durante este período, a taxa líquida aumenta, o que faz *o estoque aumentar a uma taxa crescente*, terminando com uma inclinação de 60 unidades/mês à medida que a taxa líquida atinge o seu máximo. Novamente, *o estoque ganha o mesmo valor*, recuperando seu nível inicial de 600 unidades exatamente no mês 12. **Após o mês 12 o ciclo se repete**. O exemplo ilustra a forma como o processo de acumulação cria atrasos. A entrada para o sistema é uma flutuação com um período de 12 meses, atingindo seu pico no tempo 0, 12, 24,... meses. *O estoque*, ou estado do sistema, também flutua num período de 12 meses, mas *fica atrasado em relação à taxa de entrada líquida*, atingindo seus picos nos tempos 3, 15,27,... meses. O *retardo é*

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

precisamente um quarto de ciclo, aproximadamente três meses. O **atraso ocorre porque o estoque só pode diminuir quando o fluxo líquido é negativo. Se o fluxo líquido for positivo e cair para zero, o estoque aumenta e atinge seu valor máximo**. A curva de cor lilás na Figura 7, mostra uma estimativa do processo de integração gráfica do estoque para o Exemplo 1.

Figura 7. O Processo de Integração Gráfica. A curva de cor lilás representa uma boa aproximação do estoque da dinâmica do sistema.



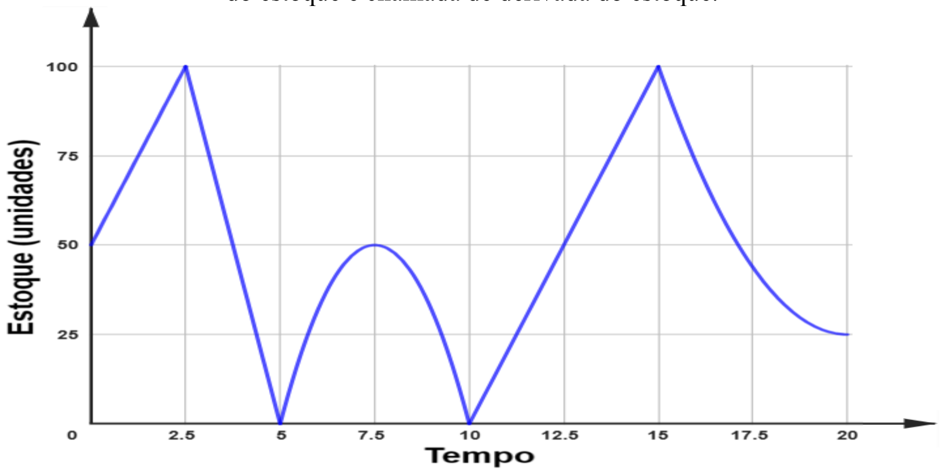
Fonte: Os autores.

O processo de diferenciação gráfica é direta, não precisa de alguma orientação inicial, basta estimar a inclinação do estoque em cada intervalo de tempo e representá-lo em um gráfico do fluxo total (taxa líquida). O exemplo a seguir fornece o desenvolvimento do processo.

Exemplo 2. O conjunto de atividades que envolvem a criação de produtos ou serviços, desde a transformação da matéria-prima até a entrega ao cliente, é definido como a produção de uma empresa. A trajetória do estoque ou produtos fabricados é mostrada na Figura 8. Determine o comportamento de seu fluxo total ou taxa líquida por diferenciação gráfica. Não use computador.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Figura 8. Representação gráfica da diferenciação (fluxo total) a partir da integração (estoque). A inclinação da trajetória do estoque é chamada de derivada do estoque.



Fonte. Os autores.

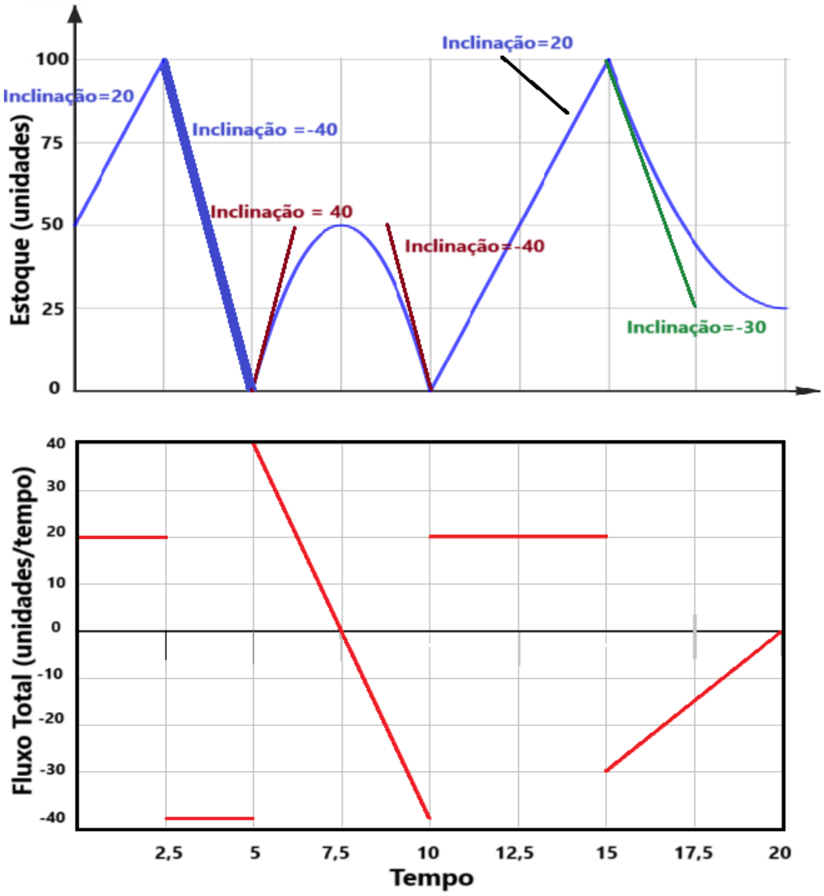
Solução: O estoque inicial é de 50 unidades. Durante a primeira **metade [0; 2,5] do intervalo** de tempo **[0; 5]**, o estoque aumenta linearmente, de modo que a taxa líquida durante esse intervalo é positiva e constante. O estoque aumenta de 50 para 100 unidades em 2,5 unidades de tempo, então **a taxa líquida (a inclinação do estoque) é de 20 unidades por unidade de tempo**, na primeira metade. Na segunda **metade [2,5; 5]** do **intervalo [0; 5]**, o estoque começa a diminuir linearmente e repentinamente de 100 para 0 unidades em 2,5 unidades de tempo, então **a taxa líquida (a inclinação do estoque é negativa) é de -40 unidades por unidade de tempo**. No intervalo de tempo **(5; 10]**; o estoque começa a aumentar repentinamente na primeira metade de tempo e diminuir na outra metade. **No tempo 5**, o estoque começa a aumentar repentinamente. Desenhar uma linha de inclinação α que aproxima à tangente à curva de estoque no tempo 5, sendo essa linha a hipotenusa de um triangulo retângulo de catetos 1,25 e 50, dá uma estimativa da inclinação de 40 $= \tan\alpha =$ 50/1,25 unidades/tempo. **A taxa líquida, portanto, aumenta de -40 unidades/tempo** no instante anterior ao início do tempo 5 **para +50 unidades/tempo logo após seu início**.

No intervalo **(5; 7,5]**, o estoque aumenta a uma taxa decrescente, pelo que **a taxa líquida é positiva, mas decrescente**. No **tempo 7,5** o estoque atinge o máximo, então a **taxa líquida é zero**. Não há distorções ou solavancos na trajetória do estoque, o que implica um declínio constante e linear na **taxa líquida de 40 unidades/tempo no tempo 5 para zero no instante 10**. No **intervalo [7,5; 10]** o estoque está caindo. No instante 10, está caindo rapidamente; a inclinação de uma linha tangente à trajetória do estoque no instante 10 tem uma inclinação de -40 unidades/tempo. Novamente, não há distorções na trajetória, portanto a **taxa líquida cai linearmente de zero no instante 7,5 para -40 unidades/tempo no instante 10**. No **intervalo (10; 15]**, o estoque cresce repentinamente de forma linear a uma taxa líquida positiva constante. O estoque aumenta de 0 para 100 unidades em 20 = $\tan\beta$

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

=100/5 unidades/tempo, onde β é o ângulo de inclinação da reta que liga os pontos (10;0) e (15;100). **A taxa líquida, portanto, aumenta de -40 unidades/tempo** no instante anterior ao início do tempo 10 **para +20 unidades/tempo logo após seu início** permanecendo constante até o tempo 15. No intervalo de tempo **(15; 20]**, o estoque diminui a uma taxa crescente, pelo que **a taxa líquida é negativa, mas crescente**. Após do tempo de início 15 podemos desenhar uma linha de inclinação θ que aproxima à tangente à curva de estoque no tempo 15, sendo essa linha a hipotenusa de um triangulo retângulo de catetos 75 e 2,5, dá uma estimativa da inclinação de -30 = -tan θ = 75/2,5 unidades/tempo. **A taxa líquida, portanto, diminui de 20 unidades/tempo** no instante anterior ao início do tempo 15 **para -30 unidades/tempo**, crescendo linearmente **até chegar a 0 por unidade de tempo no instante 20**. A Figura 9 mostra o processo de diferenciação gráfica descrito acima.

Figura 9. Representação gráfica do processo de diferenciação (fluxo total) a partir do estoque.



Fonte: Os autores.

2.3 CONSTRUINDO UMA ATIVIDADE NO SOFTWARE VENSIM

Para compreender a dinâmica de estoques e fluxos por meio do software Vensim, elaboramos e apresentamos, a seguir, uma atividade didática. Não pretendemos esgotar todas as funcionalidades

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

do software, mas sim demonstrar como ele pode auxiliar no desenvolvimento do pensamento dos alunos, especialmente na construção de seus próprios modelos.

O leitor interessado em aprofundar o software, pode acessar os tutorias encontrados na plataforma https://vensim.com/faq/#What_is_Systems_Thinking ou consultar Villela (2005) para uma referência em língua portuguesa.

Exemplo 3. (Dinâmica de uma Poupança). Calcular a evolução de uma conta poupança por um período de 24 meses, considerando um capital inicial de 5.000 reais. A dinâmica está sendo realizada através de depósitos mensais de 200 reais e retiradas mensais de 100 reais.

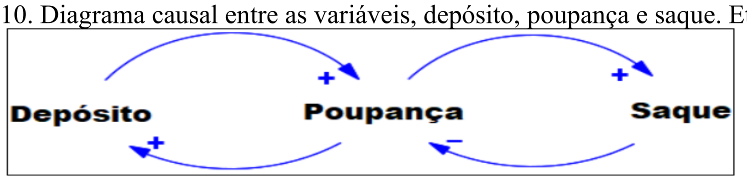
Solução: As variáveis que estão presentes na dinâmica do sistema são: depósito, poupança e saque. Identificamos o estoque (acumulo em reais) com a poupança. Dessa forma, se $P(t)$ representa a poupança no instante $t \geq 0$, então $P(t_0)$= $P(0)$=5.000, vemos que o estoque está sendo alimentado continuamente pelo depósito (Fluxo de entrada, $FE(t)$) e pelo saque (Fluxo de saída, $FS(t)$). De (1) e (2) temos:

$$\text{P}\ (t) = \textbf{INTEGRAL}\ (\text{FE}\ (t) - \text{FS}\ (t)\ ,\ 5.000).$$

$$FE(t)\ -\ FS(t)\ = \textbf{DERIVADA}\ (\boldsymbol{t}) = \text{Depósito} - \text{Saque}.$$

- Etapa 1. *Elaboração do diagrama do modelo causal*. Resulta claro que maior é o depósito maior será a poupança arrecadada e reciprocamente. Se a poupança aumenta, existirá mais dinheiro a sacar e reciprocamente. Em ambos os casos temos dois ciclos de feedback positivo, O diagrama causal na Figura 10 expressa as relações entre as variáveis do problema.

Figura 10. Diagrama causal entre as variáveis, depósito, poupança e saque. Etapa 1.

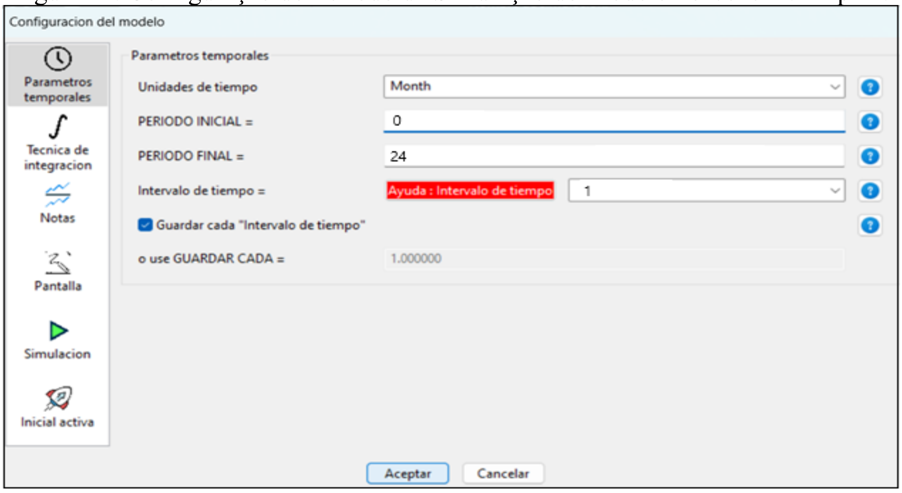


Fonte. Elaboração pelos autores no Vensim.

- Etapa 2. *Configuração do Modelo no Vensim*.
  - Abrir o Vensim: Inicie o software.
  - Acessar Configurações: Clique em Model e depois em Settings.
  - Definir Período: Configure o início em 0 meses e o fim em 24 meses, Figura 11.
  - Selecionar Unidade: Escolha Month (meses).
  - Salvar Configurações: Clique em OK.

ISSN: 2358-2472

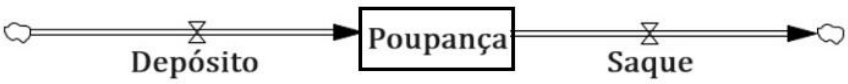
Figura 11. Configuração do Período da Simulação do Modelo no Vensim. Etapa 2.



Fonte. Elaboração pelos autores no Vensim.

- Etapa 3: *Definir a variável Poupança.*
- Selecionar Stock Tool.
- Nomear: Digite poupança e pressione Enter.
- Etapa 4: *Definir a variável Depósito*.
- Selecionar Flow Tool.
- Posicionar: Clique à esquerda de poupança e arraste para a direita.
- Nomear: Digite Depósito e pressione Enter.
- Etapa 5: *Definir a variável Saque*.
- Selecionar Flow Tool.
- Posicionar: Clique à esquerda de poupança e arraste para a direita.
- Nomear: Digite Saque e pressione Enter.

Figura 12. Variáveis Depósito (fluxo entrada), Saque (Fluxo de saída) e Poupança (estoque) definidas. Etapas 3, 4 e 5.



Fonte: Os autores.

- Etapa 6. *Definir Valores nas Equações.*
- Definir a variável Depósito: Clique duas vezes na variável Depósito. Pressione a tecla Equations (f_x) na barra de ferramentas. Insira o valor 200 e pressione Enter.
- Definir a variável Saque: Clique duas vezes na variável saque. Pressione a tecla Equations (f_x) na barra de ferramentas. Insira o valor 100 e pressione Enter.

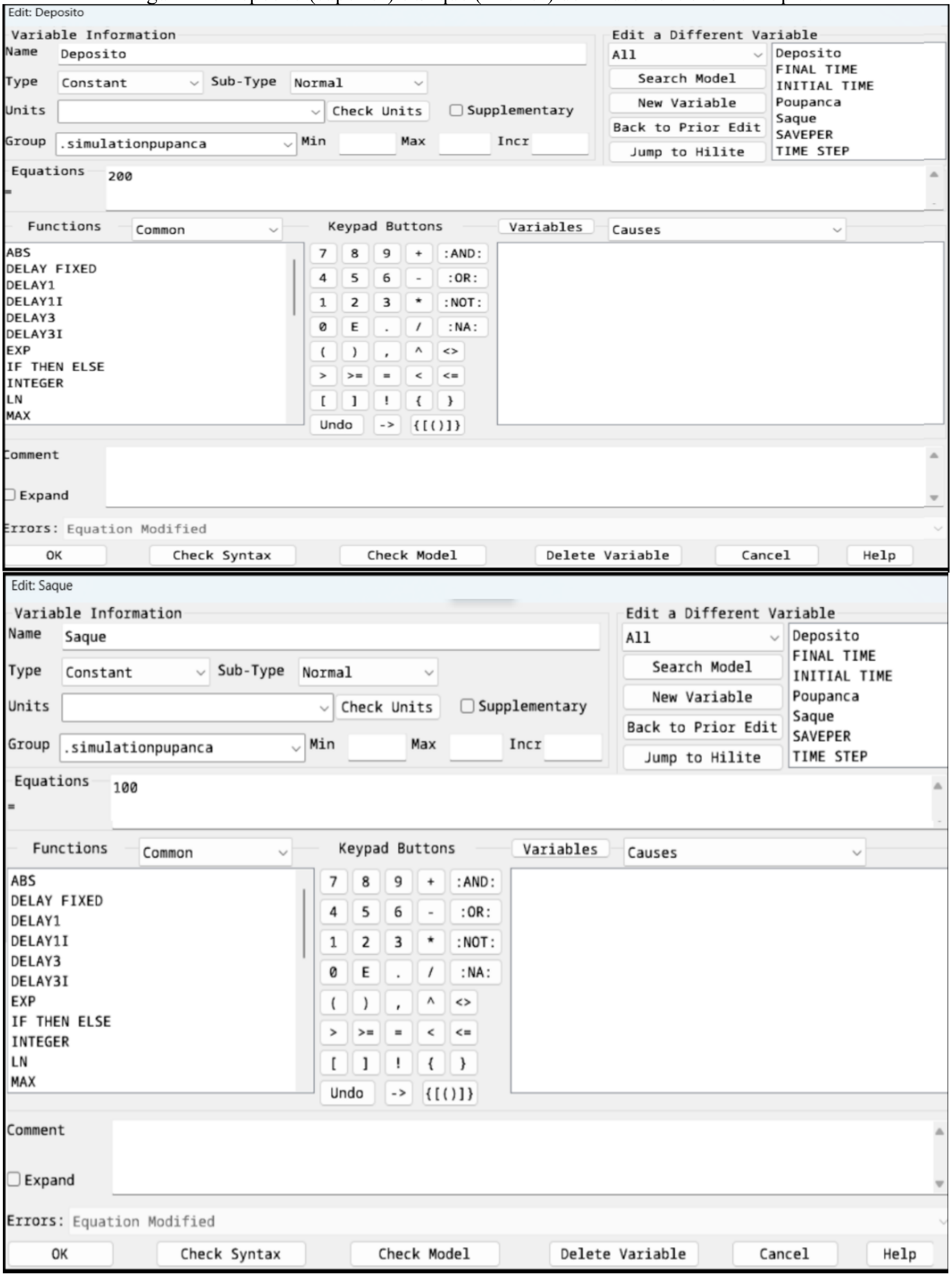
Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

- Definir a variável Poupança: Clique duas vezes na variável poupança. Pressione a tecla Equations (f_x) na barra de ferramentas. Use o valor inicial 5000 e selecione tipo nível, veja Figura 13. Para a equação use:

Poupança = $P(t)$ = **Integ** (Depósito - Saque, 5.000).

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Figura 13. Depósito (superior) e Saque (inferior) definidas no Vensim. Etapa 6.

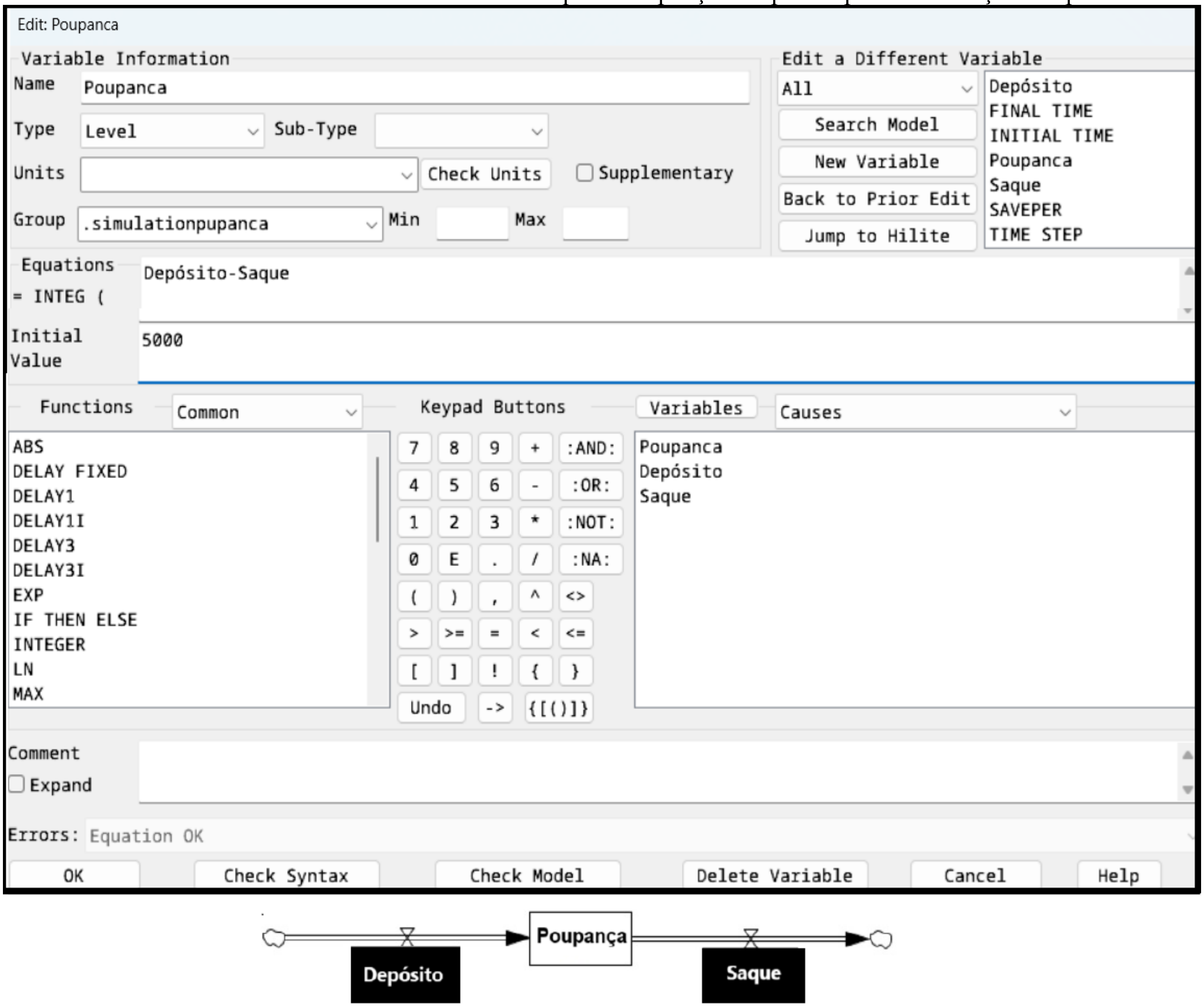


Fonte: Os autores.

- Etapa 7. *Verificação das Variáveis*. Após dar OK no quadro Editing Equation for – Poupança (Figura 14), o modelo vai mostrar as variáveis Depósito e Saque em NEGRITO, indicando que as duas variáveis ainda não tiveram seus valores ou equações definidos.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Figura 14. Parte superior: Variável Poupança definida. Parte inferior: as caixas em negritas indica que as variáveis não estão definidas. A caixa de cor branca indica que a Poupança está pronta para a simulação. Etapa 7.

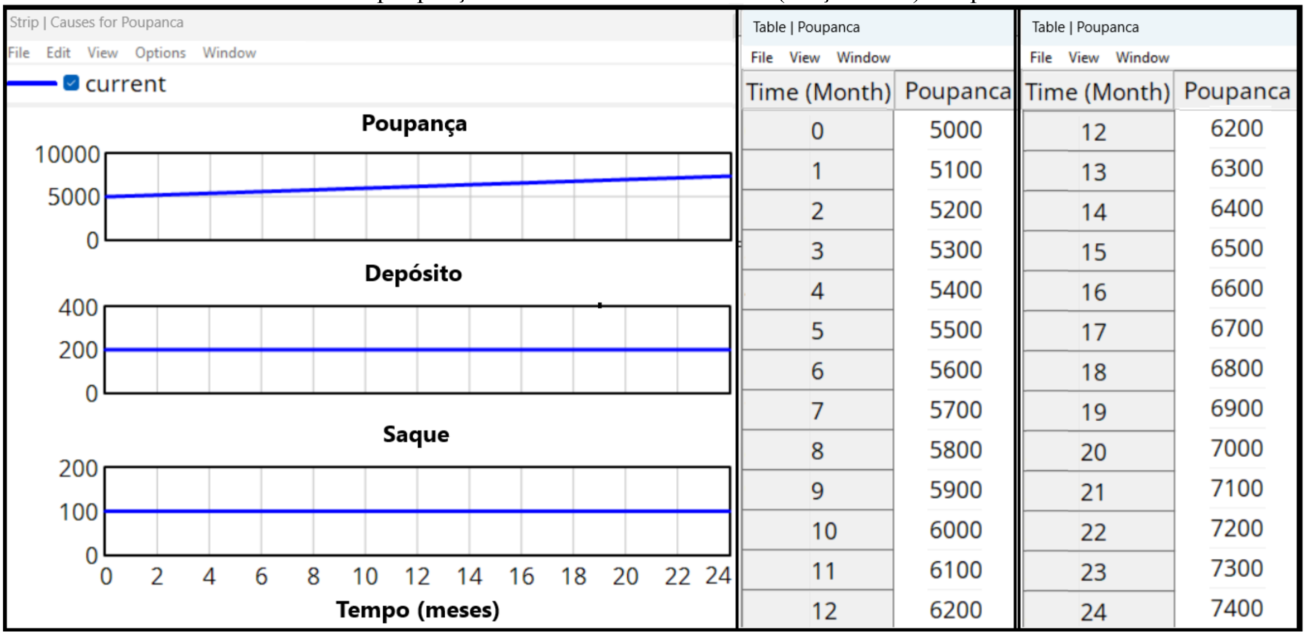


Fonte: Os autores.

- Etapa 8. *Simulações*. Para fazer a simulação, pressionar o botão *Run a Simulation*. Logo pressionar a variável Poupança. Para indicar a variável, pressionar o Mouse no centro de Poupança. Proceder da mesma maneira com as outras variáveis. Se as variáveis não apresentam nenhuma variável em NEGRITO, o modelo está pronto para a simulação. Após todas as variáveis estarem definidas, são realizadas as simulações. A Figura 15 mostra a simulação da dinâmica da Poupança.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Figura 15. Simulação da dinâmica do Exemplo 3 realizado no software Vensim. A simulação apresenta resultados onde a variável poupança tem um crescimento linear (função afim). Etapa 8.



Time (Month)	Poupanca
0	5000
1	5100
2	5200
3	5300
4	5400
5	5500
6	5600
7	5700
8	5800
9	5900
10	6000
11	6100
12	6200

Time (Month)	Poupanca
12	6200
13	6300
14	6400
15	6500
16	6600
17	6700
18	6800
19	6900
20	7000
21	7100
22	7200
23	7300
24	7400

Fonte: Os autores.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A seguir está a proposta detalhada da Sequência Didática, construída com base nos conteúdos já apresentados anteriormente como Dinâmica de Sistemas, Modelo Causal, Estoque e Fluxo e Vensim, que pode ser aplicada em escolas públicas, no contexto do *Projeto de Extensão Primeiros Passos na Ciência* e *Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica Júnior*. Essa estrutura foi elaborada baseado nas experiências encontradas no desenvolvimento dos projetos desenvolvidos com alunos do Ensino Médio e pode ser adaptada conforme o tempo disponível e perfil dos alunos, por professores da Educação Básica.

3.1 PROCEDIMENTOS E SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Objetivo: Induzir os conceitos de derivada e integral de maneira intuitiva e compreensível no ensino médio, utilizando abordagens teóricas e computacionais da dinâmica de sistemas.

Justificativa: O uso de abordagens teóricas e computacionais da Dinâmica de Sistemas no Ensino Médio facilita a compreensão intuitiva de derivadas e integrais, formando uma base intuitiva sólida para estudos futuros. Além de reforçar os fundamentos matemáticos, a metodologia estimula o interesse por matemática aplicada e promove uma transição mais suave para conteúdos abstratos do Ensino Superior.

Metodologia: A proposta foi elaborada para uma turma do 2º ano do Ensino Médio, dentro do Itinerário Formativo do Núcleo de Inovação Matemática. A sequência didática é composta por sete

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

aulas organizadas de forma progressiva, favorecendo a construção gradual dos conceitos de derivada e integral por meio da Dinâmica de Sistemas.

3.1.1 Aula 1 O Conceito de Sistema

Objetivo, apresentar os conceitos introdutórios sobre o que é um sistema, seus componentes, características e objetivos. A partir de situações do cotidiano dos alunos, é construída coletivamente a ideia de sistema como um conjunto de elementos interdependentes, que interagem para alcançar um propósito específico.

3.1.2 Aula 2 Introdução ao Pensamento Sistêmico

Objetivo, apresentar os conceitos iniciais sobre pensamento sistêmico, uma abordagem que permite analisar problemas de forma integrada e compreender a interdependência entre os elementos de um sistema. A partir da observação de situações complexas do cotidiano, os alunos são convidados a refletir sobre como diferentes fatores se influenciam mutuamente ao longo do tempo. A aula busca desenvolver a capacidade dos estudantes de enxergar além dos eventos isolados, reconhecendo padrões, estruturas e conexões que influenciam os resultados dentro de um sistema.

3.1.2.1 Principais conteúdos abordados

Definição de pensamento sistêmico: abordagem que busca entender como os elementos de um sistema interagem ao longo do tempo, influenciando uns aos outros e contribuindo para o comportamento geral do sistema.

Importância do pensamento sistêmico: ferramenta essencial para lidar com problemas complexos e dinâmicos, permitindo uma visão mais ampla que apoia o planejamento estratégico, a inovação e a melhoria contínua.

Modelos causais: representações visuais que ajudam a mapear as relações de causa e efeito entre variáveis dentro de um sistema, facilitando a compreensão das conexões e das consequências das ações adotadas.

3.1.3 Aula 3 Estoque e Fluxo (introdução com o Jogo do Mamute)

Nesta aula, são introduzidos aos conceitos de estoque e fluxo por meio de atividades lúdicas e metáforas visuais. A compreensão desses conceitos é essencial para o pensamento sistêmico, pois permite entender como os sistemas se comportam ao longo do tempo.

A metáfora da banheira é utilizada para representar visualmente a relação entre estoque e fluxo:

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

- O estoque é simbolizado pela quantidade de água no tanque.
- O fluxo de entrada é representado pela torneira aberta, adicionando água.
- O fluxo de saída pode ser ilustrado pelo ralo da banheira, escoando a água.

Para reforçar o aprendizado, é utilizado o Jogo do Mamute, uma simulação interativa que representa a gestão de uma população fictícia. A atividade permite aos alunos observar o impacto de nascimentos e mortes (fluxos) sobre o tamanho da população (estoque), ao longo do tempo.

3.1.3.1 Principais conteúdos abordados

- Conceito de estoque: quantidade acumulada em determinado momento (ex.: número de indivíduos, volume de água, dinheiro em caixa).
- Conceito de fluxo: taxa de entrada e saída que altera o estoque ao longo do tempo (ex.: nascimentos/mortes, entrada/saída de recursos).
- Metáfora da banheira: recurso visual e intuitivo que facilita a compreensão das dinâmicas entre estoques e fluxos.

3.1.4 Aula 4 Análise e Comparação dos Resultados do Jogo do Mamute

Dando continuidade ao Jogo do Mamute, nesta aula os alunos analisam e comparam os gráficos gerados em diferentes cenários — com e sem a presença de caçadores — para compreender como os fluxos afetam diretamente o estoque populacional.

A partir dessa comparação, são discutidas diferentes dinâmicas de sistemas, como curvas de declínio, estabilização e equilíbrio populacional. Introduz-se o conceito de fluxo líquido, entendido como a diferença entre entradas e saídas, e a taxa líquida de variação, como forma de medir as mudanças no estoque ao longo do tempo.

3.1.4.1 Principais conteúdos abordados

- Comparação de gráficos e cenários do jogo.
- Análise de curvas de comportamento ao longo do tempo.
- Conceitos de fluxo líquido e taxa líquida de variação.
- Noções de estabilidade, crescimento e declínio populacional.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

3.1.5 Aula 5 Interpretação Gráfica: Fluxo e Taxa Líquida

Esta aula aprofunda a capacidade dos alunos de interpretar graficamente o comportamento de estoques, com foco na leitura qualitativa das curvas. O objetivo é preparar os estudantes para compreender a ideia de derivada de maneira intuitiva.

A relação entre a inclinação da curva do estoque e a taxa de variação torna-se o ponto central da aula. Os alunos são incentivados a observar como diferentes trechos da curva indicam aceleração, desaceleração ou constância nos estoques, antecipando a noção matemática de taxa de mudança instantânea.

3.1.5.1 Principais conteúdos abordados

- Leitura qualitativa de gráficos de estoque.
- Relação entre inclinação da curva e taxa de variação.
- Introdução intuitiva à derivada como taxa de mudança.
- Análise de crescimento e decrescimento em diferentes contextos.

3.1.6 Aula 6 Integração Gráfica

A partir da observação de fluxos conhecidos, os alunos constroem os gráficos correspondentes aos estoques, desenvolvendo o raciocínio de acúmulo ao longo do tempo. Este processo conduz à introdução da ideia de integração, associada à área sob a curva do gráfico de fluxo. Os estudantes visualizam como o valor acumulado de um fluxo resulta em um estoque e como essa dinâmica está presente em diversas situações reais, como consumo de água, crescimento populacional e economia.

3.1.6.1 Principais conteúdos abordados

- Construção de gráficos de estoque a partir de fluxos.
- Noção de acúmulo e comportamento acumulativo ao longo do tempo.
- Introdução ao conceito de integral como área sob a curva.

3.1.7 Aula 7 Diferenciação Gráfica

Na aula final do ciclo, os alunos exploram a diferenciação gráfica como ferramenta para determinar a taxa de variação líquida a partir do gráfico do estoque. Por meio de atividades práticas, analisam a inclinação em trechos específicos da curva, identificando quando o estoque cresce, diminui ou permanece constante. Além disso, cada aluno elabora um relatório individual, refletindo sobre como

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

os conceitos de dinâmica de sistemas auxiliaram na compreensão intuitiva e aplicada dos conceitos de derivada e integral, conectando teoria matemática a fenômenos do cotidiano.

3.1.7.1 Principais conteúdos abordados

- Análise gráfica da inclinação da curva de estoque.
- Compreensão da derivada como taxa de variação.
- Interpretação matemática da diferenciação gráfica.
- Elaboração de relatório final com conexões entre matemática e dinâmica de sistemas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta visa proporcionar uma compreensão visual, contextualizada e aplicada dos conceitos de cálculo, favorecendo o desenvolvimento do pensamento sistêmico e da modelagem matemática. A utilização de jogos, simulações computacionais e análise gráfica permite ao estudante construir uma base sólida para estudos futuros, promovendo a articulação entre matemática e realidade.

5 CONCLUSÃO

Neste artigo, o objetivo principal foi de introduzir os conceitos de estoque e fluxo por meio da metodologia da dinâmica de sistemas, de maneira acessível e intuitiva. A metodologia proposta se alinha com a necessidade crescente de modernizar o ensino da matemática, oferecendo aos alunos uma compreensão mais concreta e visual do conceito intuitivo de derivada e integral, sem recorrer a uma matemática abstrata e complexa em estágios iniciais da aprendizagem.

Embora a sequência didática não tenha sido aplicada de forma prática neste estudo, espera-se que, ao ser implementada em futuros trabalhos, ela possa promover uma mudança significativa na forma como os alunos compreendem os processos de diferenciação e integração. A dinâmica de sistemas, com suas representações gráficas e simulações, tem o potencial de proporcionar uma abordagem mais interativa e envolvente, permitindo que os alunos desenvolvam uma intuição matemática fundamental para o estudo posterior de cálculo. A expectativa é que, ao trabalhar com fluxos e estoques de forma prática, os estudantes compreendam, de maneira visual e aplicada, os conceitos subjacentes à diferenciação (taxa de variação) e à integração (acúmulo ao longo do tempo).

Os principais benefícios esperados com a aplicação dessa abordagem incluem:

Desenvolvimento da intuição matemática: Ao aplicar o conceito de fluxos e estoques em modelos simples e dinâmicos, os alunos terão uma visão mais intuitiva do comportamento de sistemas

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

matemáticos, o que facilitará a compreensão dos conceitos de derivada e integral quando abordados futuramente no currículo do ensino superior.

Maior engajamento e motivação: A utilização de simulações computacionais e a visualização gráfica por meio de ferramentas como o Vensim tornam o aprendizado mais atraente e dinâmico, potencializando o engajamento dos alunos e despertando seu interesse por áreas das ciências exatas, engenharia ou ciências aplicadas.

Integração de conteúdos matemáticos com situações reais: A proposta visa mostrar aos alunos como a matemática se aplica a fenômenos reais e do cotidiano (exemplos: populações, recursos naturais, sistemas econômicos), o que pode aumentar a percepção da relevância da matemática em suas vidas e futuras carreiras.

Apoio à formação continuada de professores: A aplicação dessa metodologia, se bem implementada, também poderá ser uma importante ferramenta para a formação continuada dos professores, que poderão aprender a usar tecnologias educacionais e técnicas de modelagem matemática para ensinar de forma mais interativa e eficaz.

Contudo, como a proposta ainda não foi testada em sala de aula, não é possível validar empiricamente os resultados e os benefícios mencionados. Espera-se que, em futuras pesquisas e aplicações práticas, os professores possam implementar essa sequência didática e analisar os efeitos na compreensão dos alunos e no desempenho acadêmico, possibilitando a realização de ajustes conforme necessário.

Finalmente, os autores desse trabalho esperam ter contribuído em mostrar caminhos possíveis para o ensino de conceitos importantes nas primeiras disciplinas de um curso da área de exatas, engenharia ou ciências aplicadas. Dessa forma, espera-se que o amadurecimentos dos conceitos de derivada e integral contribua na diminuição das taxas de reprovação e evasão no ensino superior.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Federal de São João del Rei-UFSJ pela oportunidade de publicar esta pesquisa.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

REFERÊNCIAS

AMARAL, J. A. Desvendando sistemas. São Paulo: Ed. do Autor, 2012.

AVILA, G. Limites e Derivadas no Ensino Médio? In: Revista do Professor de Matemática, n.60, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), p. 30-38, 2006.

APARECIDA, F.; DÁVALOS, J. Os Processos de Diferenciação e Integração Gráfica: Uma Abordagem Através da Dinâmica de Sistemas. Dissertação Mestrado Profissional, PROFMAT/UFSJ/CSA, 2025.

FORRESTER, J. Industrial Dynamics. [S.l.]: New York: John Wiley e Sons, 1961.

GIRALDO, V; CAETANO, P.; MATTOS, F. Recursos Computacionais no Ensino de Matemática. UFRJ, UFSCar, UERJ/CP2. (2012), 240p.

KUBICEK, A. Models for Logistic Growth Processes (e.g. Fish Population in a Pond, Number of Mobile Phones within a Given Population) Real-World Problems for Secondary School Mathematics Students: Case Studies, Juergen Maasz and John O'Donoghue eds. 187-208. Sense Publishers, Netherlands, 2011.

SENGE, P. The Fifth Discipline: The art and practice of the learning organization. Doubleday, New York, 1990.

STERMAN, J. Business Dynamics: Systems Thinking and Modeling for a Complex World. Irwin / McGraw-Hill, 2000.

VILLELA, P. R. C. Introdução à Dinâmica de Sistemas. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2005.

VENSIM, V. P. User Guide - Vensim Introduction and Tutorials. [S.l.], 2017.

MIT System Dynamics in Education Project (SDEP)». https://web.archive.org/web/20080509163801/http:/sysdyn.clexchange.org/ Consultado em 10 de abril de 2024. Arquivado do original em 8 de maio de 2025.