Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

UMA IMPORTANTE CONTRIBUIÇÃO DE EULLER: MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

AN IMPORTANT CONTRIBUTION FROM EULLER: NUMERICAL METHODS FOR SOLVING FIRST-ORDER LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

UNA CONTRIBUCIÓN IMPORTANTE DE EULLER: MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES DE PRIMER ORDEN

https://doi.org/10.56238/arev7n9-129

Data de submissão: 11/08/2025 **Data de publicação:** 11/09/2025

Márcio Mendonça Araújo
Especialista em Matemática e Física
Instituição: Faculdade Juazeiro do Norte
Lattes: http://lattes.cnpq.br/0870942979828456
Orcid: https://orcid.org/0009-0008-2236-002X

Rodrigo Alencar Brasil
Especialista em Tradução Audiovisual Acessível/Audiodescrição
Instituição: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)
E-mail: rodrigo.alencar@ifce.edu.br
Lattes: http://lattes.cnpq.br/7977709000851682
Orcid: https://orcid.org/0009-0009-4061-2865

Ricardo Damasceno de Oliveira
Especialista em Engenharia de Software e Design Instrucional
Instituição: Departamento de Engenharia de Produção Universidade Regional do Cariri
Lattes: http://lattes.cnpq.br/5860009496592104
Orcid: https://orcid.org/0000-0003-0185-7455

RESUMO
Neste trabalho é apresentado um breve estudo sobre as equações diferenciais. Foi realizada uma retrospectiva, destacando a importância das contribuições de Euller, mostrando dois de seus métodos de solução que usam análise numérica e cujo objetivo é facilitar os cálculos e determinar as soluções das equações, independentes das funções que as constituam. Mostraremos as deduções das fórmulas e a ideia geométrica. Por fim, aplicaremos as equações diferenciais no cálculo envolvendo juros compostos. Destaca-se ainda que esse trabalho é de abordagem qualitativa, de caráter explicativo, resultado de uma pesquisa bibliográfica.

Palavras-chave: Equações Diferenciais. Análise Numérica. Juros Compostos.

ABSTRACT
In this paper, we present a brief study of differential equations. We will do a retrospective, highlighting the importance of the contributions of Euller, showing two of its solution methods that use numerical

ISSN: 2358-2472

analysis and whose goal is to facilitate the calculations and determine the solutions of the equations, independent of the functions that constitute. Show the deductions of the formulas and geometric idea. Finally, we apply the differential equations involved in calculating compound interest. It is also important to emphasize that this work adopts a qualitative approach, is explanatory in nature, and is the result of bibliographic research.

Keywords: Differential Equations. Numerical Analysis. Compound Interest.

RESUMEN

Este artículo presenta un breve estudio de las ecuaciones diferenciales. Una retrospectiva destaca la importancia de las contribuciones de Euller, presentando dos de sus métodos de solución que utilizan el análisis numérico y buscan facilitar los cálculos y determinar las soluciones de las ecuaciones, independientemente de sus funciones constituyentes. Demostraremos la derivación de las fórmulas y el concepto geométrico. Finalmente, aplicaremos las ecuaciones diferenciales a los cálculos que involucran interés compuesto. Cabe destacar que este trabajo utiliza un enfoque cualitativo, es de naturaleza explicativa y es resultado de una investigación bibliográfica.

Palabras clave: Ecuaciones Diferenciales. Análisis Numérico. Interés Compuesto.

1 INTRODUÇÃO

A resolução de muitos problemas encontrados na engenharia e em muitas áreas do conhecimento é obtida por meio de modelagem com equações diferenciais, cuja solução, em variados casos, é obtida por meio de análise numérica. A solução numérica de um problema de um modo geral segue os seguintes passos:

> → Definição do problema: Com o uso de relações constitutivas, emprego de leis de conservação (equação da energia, quantidade de movimento, conservação da massa), e condições de contorno iniciais, determina-se um modelo matemático para o problema;
>
> → Modelagem do problema: Nesta fase são feitas as considerações e simplificações físicas do problema;
>
> → Modelo matemático: Realizadas todas as considerações e simplificações ao problema chega-se ao modelo matemático que representará o problema real;
>
> → Resolução do modelo: Nesta fase, aplica-se uma ferramenta de resolução que pode ser analítica, numérica ou híbrida (analítica e numérica);
>
> → Solução do problema: Consiste na apresentação dos resultados obtidos.
> (SPERANDIO, 2003, p. 01).

O presente trabalho tem por objetivo apresentar os resultados obtidos em uma pesquisa bibliográfica que teve como meta central a análise de alguns métodos de solução numérica de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, bem como a realização de aplicações deste tipo de equações diferenciais, cujo estudo foi e é de grande importância para o desenvolvimento da Matemática.

Inicialmente é feito um breve retrospecto histórico do contexto na qual surgiram e se desenvolveram as equações diferenciais, bem como os matemáticos influentes neste desenvolvimento. Apresentaremos ainda os principais critérios usados para classificação e exemplos de equações de variados tipos.

Sequencialmente serão apresentados dois importantes métodos numéricos de resolução de equações diferenciais, a saber: Método de Euler ou Método da Reta Tangente e Método de Euler Aprimorado ou Fórmula de Heun, com base, em especial, na obra Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, dos autores Willian E. BOYCE e Richard C. DIPRIMA, edição do ano 2006.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: CONTEXTO HISTÓRICO

Historicamente, a Matemática é uma atividade humana que se constitui de suas particularidades. Beneficia-se muito de competências individuais, mas dissemina-se com a aprovação

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

da comunidade em geral. Como uma forma de arte, é humanística e é cientifico-tecnológica em suas aplicações. Tal ciência e seu conjunto de saberes sempre estiveram presentes na história da humanidade. Desde a antiguidade, verifica-se a necessidade do ser humano aprimorar os conhecimentos matemáticos, tendo em vista a resolução de situações problema que emergiram em seus respectivos momentos históricos.

De acordo com DAVIS e HERSH (1985, p. 138), "a Matemática, segundo uma concepção antiga, é a ciência do espaço e da quantidade; segundo uma visão posterior, é a ciência da forma e da estrutura dedutiva". Assim, é importante compreender que os conhecimentos matemáticos se apresentam como importantes recursos para o desenvolvimento científico e tecnológico.

Neste trabalho faremos um breve estudo sobre um dos mais importantes ramos da matemática: as Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem, as quais sempre ocuparam lugar de destaque dentro das ciências exatas e cujos desenvolvimentos estão intimamente relacionados.

Consideradas as bases de sustentação do Cálculo e da Análise, as equações diferenciais compreendem uma ferramenta matemática importante para o progresso das ciências físicas e biológicas, principalmente em estudos de matemática pura e aplicada.

A propósito,

> Pode-se dizer que a diferenciação se originou de problemas relativos ao traçado de tangentes a curvas e de questões objetivando a determinação de máximos e mínimos de funções. Embora essas considerações remontem aos gregos antigos, parece razoável afirmar que a primeira manifestação realmente clara do método diferencial se encontra em algumas ideias de Fermat, expostas em 1629. (EVES, 2004, p. 428).

As contribuições de Leonhard Euler (1707 – 1783), considerado um ícone matemático da época, por meio de suas produções científicas incluíram todas as áreas da matemática e muitos campos de aplicação. Nas equações diferenciais, Euler utilizou os conhecimentos produzidos anteriormente por outros matemáticos, em especial as descobertas de Newton, para solucionar diferentes tipos de equações, isto porque compreendeu que as funções constituíam embasamento teórico fundamental no desenvolvimento de métodos para sua solução.

Vem dos estudos de Euler a condição para que as equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas, a teoria dos fatores integrantes e a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes, sendo que este último resultado foi estendido para as equações não-homogêneas. Euler utilizou ainda as Séries de Potências para resolver equações diferenciais e contribuiu de forma significativa para os estudos de equações diferenciais parciais. Neste estudo, enfatizaremos as contribuições de Euller, no que tange a solução de equações diferenciais por meios numéricos.

No século XX muitos matemáticos e cientistas da computação implementaram métodos numéricos para solução de equações diferenciais em computadores, objetivando a solução rápida e eficiente no estudo de equações mais complexas em grande escala. Tais métodos são capazes de solucionar muitos tipos de equações em um curto espaço de tempo e são indicados nos casos em que a solução analítica resulta em cálculos muito difíceis ou até mesmo impossíveis.

De acordo com Boyce (2006, p. 16):

> Nos últimos 50 anos, o desenvolvimento de computadores cada vez mais poderosos e versáteis aumentou muito a gama de problemas que podem ser investigados, de maneira efetiva, por métodos numéricos. Durante esse mesmo período, foram desenvolvidos integradores numéricos extremamente refinados e robustos, facilmente disponíveis. Versões apropriadas para computadores pessoais tornaram possível, para os estudantes, a resolução de muitos problemas significativos.

Pode-se destacar uma importante característica do estudo de equações diferenciais neste século, que foi o desenvolvimento de métodos geométricos ou topológicos para a compreensão de equações não lineares. Na verdade, pretendia-se com isso, analisar as soluções em uma ótica geométrica e assim, buscar formas de conhecer a construção de suas soluções analíticas.

Nos últimos anos, tanto os métodos geométricos quanto os topológicos passaram por um processo de integração, facilitados pelo impulso que receberam da computação gráfica. Dessa forma, impulsionaram também os estudos de equações não lineares. Alguns fenômenos inesperados são advindos deste estudo, como a Teoria dos Fractais, que estão sendo estudados intensamente. Com isso, abrem-se novas portas para o desenvolvimento de diferentes ideias de aplicações.

Mesmo sendo um referencial teórico estudado há muito tempo, as equações diferenciais ainda abrangem uma série de problemas não resolvidos, continuam presentes em outros abordados no século XXI e continuaram destacando-se nos estudos em diversas áreas e Ciências, enfatizando aqui, a ciência Matemática.

3 MÉTODO DE EULER OU MÉTODO DA RETA TANGENTE

Consideremos a equação diferencial $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ na condição inicial

$$y(t_0) = y_0. \tag{2.1}$$

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Sabemos que muitas vezes não é possível encontrar a solução por manipulações triviais da equação diferencial. A respeito disso, CAMPOS (2007, p. 324) comenta: "Os métodos analíticos são restritos apenas a algumas formas especiais de função, visto que nem toda E.D.O tem solução analítica. Os métodos numéricos não possuem tal limitação."

Sabemos que existem muitos problemas importantes em áreas como Engenharia e Ciências Físicas e Biológicas em que os métodos analíticos de solução para equações diferenciais não são aplicáveis, ou ainda, são aplicáveis, mas resultam em cálculos deveras complicados. Em casos desse tipo, é necessário abordar o problema por ângulos alternativos, buscando métodos que possam solucioná-los sem que, para tal, sejam necessários cálculos excessivamente difíceis.

Uma maneira eficaz de encontrar a solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial (2.1) é calcular valores próximos da solução para valores escolhidos de *t*.

Apresentaremos aqui o mais antigo e mais simples método de resolução numérica de equações diferenciais. Este foi desenvolvido por Euler, por volta de 1768 e é conhecido como Método de Euler ou Método da Reta Tangente.

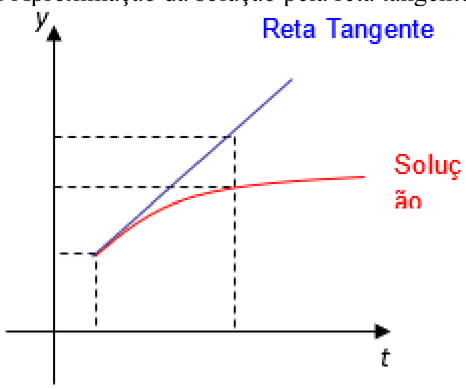
Esse método aproxima a solução $y = \phi(t)$ da equação $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ em um ponto próximo de $t = t_0$.

É sabido que o gráfico de *y* contém o ponto (t_0, y_0). Também sabemos que a reta tangente ao gráfico de *y* tem inclinação $f(t_0, y_0)$ neste ponto. Dessa forma, vamos escrever uma equação da reta tangente à solução em (t_0, y_0).

Assim, usando a Geometria Analítica temos a equação $y - y_0 = f(t_0, y_0) \cdot (t - t_0)$. Donde concluímos que $y = y_0 + f(t_0, y_0) \cdot (t - t_0)$.

Em um intervalo suficientemente curto, a reta tangente é uma boa aproximação da solução. Observe a figura:

FIG. 2.1 Aproximação da solução pela reta tangente.



Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Com isso, estando t_1 suficientemente próximo de t_0, iremos aproximar $\phi(t_1)$ por y_1 fazendo a substituição $t = t_1$ na equação da reta tangente no ponto $t = t_0$, assim $y_1 = y_0 + f(t_0, y_0) \cdot (t - t_0)$.

Repetimos esse processo e, como o valor de $\phi(t_1)$ não é conhecido, usamos y_1 como aproximação de $\phi(t_1)$.

Assim, escrevemos a equação da reta tangente contendo o ponto (t_1, y_1) com coeficiente angular $f(t_1, y_1)$.

$$y = y_1 + f(t_1, y_1) \cdot (t - t_1).$$

Aproximando o valor de y em um ponto próximo de t_2, escrevemos a equação $y_2 = y_1 + f(t_1, y_1) \cdot (t - t_1)$.

Continuando esse processo indefinidamente e usando o valor de y encontrado em cada etapa para determinar o coeficiente angular para uma próxima aproximação, determinamos à expressão geral para y_{n+1} em função de t_n, t_{n+1} e y_n como sendo:

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n) \cdot (t_{n+1} - t_n)$$

Para:

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Suponhamos agora, que exista um tamanho semelhante para cada passo h entre os pontos $t_0, t_1, t_2, \dots$,então definimos $t_{n+1} = t_n + h$. Finalmente, se escrevermos $f(t_n, y_n) = f_n$, obtemos a Fórmula de Euler:

$$y_{n+1} = y_n + f_n \cdot h$$

Para :

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Para solucionar equações diferenciais numericamente, aplicamos a Fórmula de Euler repetidas vezes. Assim, encontramos uma sequência de valores $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ que são próximos da solução nos pontos $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$.

A convergência do Método de Euler está diretamente relacionada ao tamanho do passo h, ou seja, quanto menor for à diferença $t_{n+1} - t_n$, mais rapidamente as aproximações irão convergir para o valor exato da solução do problema de valor inicial (2.1).

A seguir, mostraremos que sob condições apropriadas para f a aproximação gerada pelo Método de Euler para o problema de valor inicial $y' = f(t, y)$com $y(t_0) = y_0$ converge para a solução exata quando o tamanho do passo h diminui.

Consideremos o problema de valor inicial,

$$y' = 1 - t + y, y(t_0) = y_0 \qquad (2.2)$$

Resolvendo esta equação analiticamente, encontramos a solução geral $y = t + ce^t$. Aplicando a condição inicial $y(t_0) = y_0$, obtemos a solução particular $y = e^{t-t_0} \cdot (y_0 - t_0) + t$.

Seja a solução uma função $\phi(t)$, então,

$$y = \phi(t) = (y_0 - t_0) \cdot e^{t-t_0} + t \qquad (2.3)$$

Nesse momento iremos aplicar a Fórmula de Euler na equação (2.2).

Inicialmente, reescrevemos a fórmula $y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n) \cdot (t_{n+1} - t_n)$, *n=0, 1, 2,...* da forma

$$y_k = y_{k-1} + f(t_{k-1}, y_{k-1}) \cdot (t_k - t_{k-1}), \qquad (2.4)$$

Para:

k=1,2,3,....

Fazendo $f(t_{k-1}, y_{k-1}) = 1 - t_{k-1} + y_{k-1}$, a equação (2.4) resulta,

$$y_k = y_{k-1} + y_{k-1} \cdot (t_k - t_{k-1}) + t_k - t_{k-1} - t_{k-1} \cdot (t_k - t_{k-1}).$$

Sabemos da Fórmula de Euler que $t_k - t_{k-1} = h$, assim:

$$y_k = y_{k-1} + y_{k-1} \cdot h + h - t_{k-1} \cdot h. \qquad (2.5)$$

Organizando os termos de (2.5), obtemos a equação

$$y_k = (1 + h) \cdot y_{k-1} + h - t_{k-1} \cdot h, \qquad (2.6)$$

Para:

k=1, 2, 3,….

Note que se fizermos *k=1* em (2.6) e depois $t_1 - t_0 = h$, resulta:

$$y_1 = (1 + h) \cdot (y_0 - t_0) + t_1.$$

Façamos agora *k=2*, obtendo:

$$y_2 = (1 + h) \cdot y_1 + h - h \cdot t_1$$

Substituindo o valor de y_1, resulta:

$$y_2 = (1 + h)^2 \cdot (y_0 - t_0) + t_2$$

Efetuando estes cálculos repetidas vezes, iremos notar que,

$$y_n = (1 + h)^n \cdot (y_0 - t_0) + t_n, n > 0 \text{ e } n \in Z. \qquad (2.7)$$

Iremos demonstrar esta fórmula usando o método da indução matemática sobre *n*.
Já verificamos que para *n=1*, a equação (3.1.7) é verdadeira.
Suponhamos agora que tal fórmula seja válida para o caso *n=p*, ou seja,

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

$y_p = (1+h)^p \cdot (y_0 - t_0) + t_p$, *p>0* e $p \in Z$ e provemos que ela é válida para o caso *n=p+1*.

Assim,

$$y_{p+1} = (1+h) \cdot y_p + h - h \cdot t_p$$

Por hipótese, $y_p = (1+h)^p \cdot (y_0 - t_0) + t_p$, logo,

$$y_{p+1} = (1+h) \cdot \left[(1+h)^p \cdot (y_0 - t_0) + t_p\right] + h - h \cdot t_p$$

$y_{p+1} = (1+h)^{p+1} \cdot (y_0 - t_0) + t_p + t_p + t_p \cdot h + h - h \cdot t_p$, donde concluímos que,

$y_{p+1} = (1+h)^{p+1} \cdot (y_0 - t_0) + t_{p+1}$.

Assim, fica provada a fórmula (2.7) para cada inteiro positivo *n*.

Consideremos agora um ponto fixo $t > t_0$ e tomemos o passo *h* como sendo, $h = (t - t_0)/n$. Dessa forma, $t_n = t, \forall n$.Note ainda que se $h \to 0$ teremos $n \to \infty$.

Assim, iremos mostrar que, substituindo *h* na equação (2.7) e fazendo $n \to \infty$, y_n irá tender a solução exata $\phi(t) = (y_0 - t_0) \cdot e^{t - t_0} + t$. Então,

$$y_n = \left[1 + \left(\frac{t - t_0}{n}\right)\right]^n \cdot (y_0 - t_0) + t. \qquad (2.8)$$

Aplicando o limite nos dois membros da igualdade (2.8), temos:

$$Lim_{n \to +\infty} y_n = Lim_{n \to +\infty} \left\{\left[1 + \left(\frac{t - t_0}{n}\right)\right]^n \cdot (y_0 - t_0) + t\right\}$$

De acordo com IEZZI (2005: 107), "Seja a função $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ definida em $\{x \in \Re; x < -1 \text{ ou } x > 0\}$, então $Lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$."

De maneira geral, prova-se que, $Lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$. Logo,

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

$$Lim_{n\to\infty} y_n = e^{t-t_0}\cdot(y_0 - t_0) + t. \tag{2.9}$$

Desse modo, a organização dos termos de (2.9), nos permite concluir que $Lim_{n\to\infty} y_n = (y_0 - t_0)\cdot e^{t-t_0} + t = \phi(t)$.

Concluímos então que, quando $n \to \infty$, y_n será justamente a solução exata $\phi(t)$.

Dessa forma, compreendemos que, assim como em muitos métodos numéricos, quanto menor é o passo h, mais aproximado do exato será o valor encontrado depois de feitos os cálculos.

4 MÉTODO DE EULER APRIMORADO OU FÓRMULA DE HEUN

Antes de apresentarmos o Método de Euler Aprimorado, apresentaremos uma segunda forma de deduzir o Método de Euler mostrado na seção anterior. A saber, considere a equação diferencial $y' = f(t,y)$ e a condição inicial $y(t_0) = y_0$. Seja $y = \phi(t)$, solução desta equação, então podemos afirmar que,

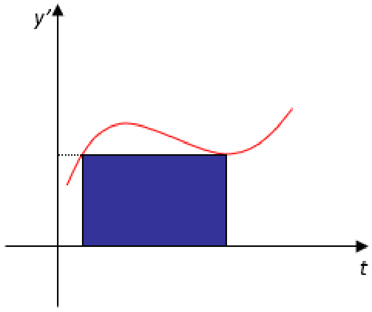
$$\phi'(t) = f[t,\phi(t)] \tag{3.1}$$

Integrando ambos os membros da igualdade acima em relação a *t*, no intervalo t_n até t_{n+1}, resulta:

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[t,\phi(t)]\,dt \tag{3.2}$$

A integral no segundo membro de (3.2) representa a área da região limitada pela curva $y' = f[t,\phi(t)]$, no intervalo t_n até t_{n+1}. Observe,

FIG. 3.1 Representação geométrica da aproximação da integral no segundo membro de (3.2).



Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Vamos aproximar a área da região pela área do retângulo colorido, desse modo reescrevemos (3.2.2) da forma:

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + f[t_n, \phi(t_n)] \cdot h, \qquad (3.3)$$

Onde:

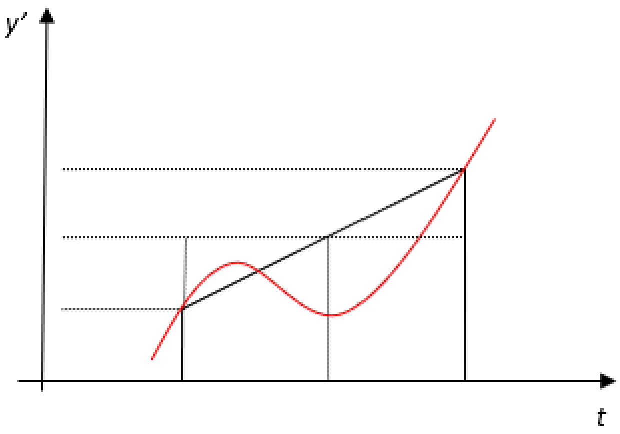
$$h = t_{n+1} - t_n.$$

Seja y_n um valor aproximado de $\phi(t_n)$, então y_{n+1} é uma aproximação para $\phi(t_{n+1})$, então obtemos a Fórmula de Euler $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$.

Aprimorar o Método de Euler consiste em aproximar o valor da integral na equação (3.2.2). Uma forma de fazer isto é aproximar a integral pela média dos seus valores nas extremidades t_n e t_{n+1}.

Observe a representação gráfica a seguir:

FIG.3.2 Dedução geométrica do Método de Euler Aprimorado (ou Fórmula de Heun)



Então, reescrevemos (3.2) na forma,

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + \frac{1}{2} \cdot \{f[t_{n+1}, \phi(t_{n+1})] + f[t_n, \phi(t_n)]\} \cdot h$$

Onde:

$$h = t_{n+1} - t_n.$$

Fazendo $\phi(t_{n+1})$ e $\phi(t_n)$ assumirem seus valores aproximados y_{n+1} e y_n, respectivamente, obtemos:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot \{f[t_{n+1}, y_{n+1}] + f[t_n, y_n]\}. \tag{3.4}$$

Organizando os termos da equação acima e substituindo t_{n+1} por $t_n + h$, resulta:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot [f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_{n+1})]. \tag{3.5}$$

Utilizando agora a Fórmula de Euler, iremos substituir y_{n+1}, no segundo membro de (3.5) por $y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$. O objetivo desta substituição é simples: se o termo y_{n+1} estiver presente em ambos os termos da igualdade, teremos uma função definida implicitamente, o que pode causar alguma complicação nos cálculos futuros. Finalmente, fazendo $f(t_n, y_n) = f_n$, encontramos a Fórmula de Euler Aprimorada (também conhecida como Fórmula de Heun).

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot [f_n + f(t_n + h, y_n + h \cdot f_n)]. \tag{3.6}$$

A equação (3.6) define explicitamente uma fórmula para o cálculo de y_{n+1}. É interessante observar que a aproximação usando o Método de Euler Aprimorado só é possível após a aplicação do Método de Euler.

5 APLICAÇÕES

5.1 JUROS COMPOSTOS

Vamos supor que uma determinada quantidade de dinheiro foi depositada, ou investida, em um banco ou Fundo de Investimento que rende juros a uma taxa mensal *r*. O valor do investimento, que chamaremos de *S(t)*, para qualquer instante *t* , depende da taxa de juros e também da frequência na qual os juros são compostos.

Supondo que os juros sejam compostos continuamente, vamos descrever o crescimento do investimento.

Seja ds/dta taxa de variação da quantia investida, temos que essa taxa é igual ao produto do juro *r* pelo valor investido *S*. Então,

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

$\frac{ds}{dt} = r \cdot S$

Suponhamos que a quantia depositada inicialmente seja S_0, então $S(o) = S_0$.

Então temos o problema de valor inicial,

$\frac{ds}{dt} = r \cdot S$, na condição $S(o) = S_0$. (4.1.1)

Cuja solução é $S(t) = S_0 \cdot e^{rt}$.

A justificativa para esse resultado é simples: vamos recordar que o montante de um investimento a juros compostos é dado pela equação $M = S_0 \cdot (1 + r)^t$, onde S_0 é a quantia investida, r é a taxa de juros e t é o tempo. Assim, supondo que a taxa seja calculada m vezes ao ano, obtemos a equação $M = S_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$.

Vamos aplicar o limite aos dois membros da igualdade acima:

$$Lim_{m \to +\infty} M = Lim_{m \to +\infty} S_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} \Rightarrow S_0 \cdot e^{rt} = S(t).$$

Imaginemos agora que existam depósitos e saques, além dos rendimentos e que estes sejam efetivados a uma taxa α constante, positiva para depósitos e negativa para saques, então (4.1.1) se torna:

$\frac{ds}{dt} = r \cdot S + \alpha$, na condição $S(o) = S_0$. (4.1.2)

Escrevemos a equação $\frac{ds}{dt} = r \cdot S + \alpha$ na forma

$$\frac{ds}{dt} - r \cdot S = \alpha, \qquad (4.1.3)$$

Resolvendo esta equação usando o método analítico dos fatores integrantes encontramos a solução:

$$S(t) = S_0 \cdot e^{rt} + \frac{\alpha}{r} \cdot (e^{rt} - 1). \qquad (4.1.4)$$

6 CONCLUSÃO

As equações diferenciais ordinárias foram e continuam sendo objeto de pesquisa, estudo e análise por parte de muitos matemáticos. Seu campo de aplicação é vasto e elas estão sendo a cada dia mais e mais usadas para modelar diferentes tipos de problemas práticos, como no estudo do crescimento de populações, na dinâmica de epidemias, na condução de calor e no mercado financeiro, dentre outros.

Muitos foram os métodos desenvolvidos para a resolução analítica destas equações, no entanto, como sabemos, em algumas situações a determinação das soluções pode se tornar complexa para serem calculadas usando métodos analíticos, por conta disso alguns importantes matemáticos - destacamos aqui o trabalho de Euller - se dedicaram para encontrar maneiras rápidas e práticas de se obter a resolução de equações de primeira ordem, sendo que é devido a isto, o fato da escolha do tema abordado neste trabalho, que enfatizou a aplicação dos métodos numéricos devidos a Euller para as suas soluções.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

REFERÊNCIAS

DAVIS, Philip J. HERSH, Reuben. **A Experiência Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Francisco Alves, 1985.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

BOYCE, Willian E. DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**; tradução de Valéria de Magalhães Iorio. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

IEZZI, Gelson. Carlos Murakami, Nilson José Machado. **Fundamentos de Matemática Elementar, 8: limites, derivadas, noções de integral**. São Paulo: Atual, 2005.

SPERÂNDIO, Décio. **Cálculo Numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.

CAMPOS, Filho, Frederico Ferreira. **Algoritmos Numéricos**. Rio de Janeiro: LTC, 2007.