

**APLICAÇÃO DA ABSTRAÇÃO REFLEXIONANTE AO PROCESSO DE
INVERSÃO ARITMÉTICA**

**APPLICATION OF REFLECTIVE ABSTRACTION TO THE PROCESS OF
ARITHMETIC INVERSION**

**APLICACIÓN DE LA ABSTRACCIÓN REFLEXIVA AL PROCESO DE
INVERSIÓN ARITMÉTICA**

 <https://doi.org/10.56238/arev6n1-030>

Data de submissão: 10/04/2024

Data de publicação: 10/05/2024

Vanessa da Silva Chaves de Moraes

Doutora em Ensino de Matemática

Instituição: Universidade Franciscana (UFN)

E-mail: vscvanessa@yahoo.com.br

Denice Aparecida Fontana Nisxota Menegais

Professora

Instituição: Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA)

E-mail: denice.menegais@gmail.com

Janilse Fernandes Nunes

Doutora

Instituição: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS)

E-mail: janilse.nunes@pucrs.br

Adriana Yokoyama

Doutora em Estudos Literários

Instituição: Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)

E-mail: adrianayokoyamaa@gmail.com

Daniela Mendonça de Moraes Nunes

Graduada em Pedagogia

Instituição: Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)

E-mail: daninunes.sm@gmail.com

RESUMO

Este artigo tem como propósito investigar a inversão das operações aritméticas sob a ótica da abstração reflexionante, fundamentando-se no método clínico proposto por Jean Piaget. Para tanto, foi aplicada a prova intitulada "A Inversão das Operações Aritméticas", apresentada por Piaget (1977/1995, p. 43-58), com o intuito de identificar o nível de abstração reflexionante demonstrado pelos sujeitos da pesquisa. Os resultados revelaram que, dos três participantes analisados, um situou-se no nível IB — caracterizado pela atenção exclusiva ao conteúdo, sem articulação das formas de ação, operando, portanto, com abstrações predominantemente empíricas. Os dois demais sujeitos alcançaram o nível III, evidenciando a capacidade de refletir sobre o percurso realizado de n a n', sendo capazes de reconstruir n por meio da análise e coordenação de suas próprias ações. Assim, a comparação entre os desempenhos evidencia que os sujeitos no nível III desenvolvem a noção de número por meio da

abstração refletida, especialmente a partir da compreensão do percurso, da ordenação e da inversão das operações aritméticas.

Palavras-chave: Inversão de Operações Aritméticas. Reversibilidade. Provas Piagetianas. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This article aims to investigate the inversion of arithmetic operations from the perspective of reflective abstraction, based on the clinical method proposed by Jean Piaget. To this end, the test entitled "The Inversion of Arithmetic Operations," presented by Piaget (1977/1995, p. 43-58), was administered to identify the level of reflective abstraction demonstrated by the research subjects. The results revealed that, of the three participants analyzed, one was at level IB—characterized by exclusive attention to content, without articulation of forms of action, thus operating with predominantly empirical abstractions. The other two subjects reached level III, demonstrating the ability to reflect on the path taken from n to n' , being able to reconstruct n through the analysis and coordination of their own actions. Thus, the comparison between performances shows that subjects in Level III develop the notion of number through reflected abstraction, especially through understanding the path, ordering, and inversion of arithmetic operations.

Keywords: Inversion of Arithmetic Operations. Reversibility. Piagetian Proofs. Mathematics Teaching.

RESUMEN

Este artículo tiene como objetivo investigar la inversión de operaciones aritméticas desde la perspectiva de la abstracción reflexiva, basándose en el método clínico propuesto por Jean Piaget. Para ello, se administró la prueba "Inversión de Operaciones Aritméticas", presentada por Piaget (1977/1995, p. 43-58), para identificar el nivel de abstracción reflexiva demostrado por los sujetos de investigación. Los resultados revelaron que, de los tres participantes analizados, uno se encontraba en el nivel IB, caracterizado por una atención exclusiva al contenido, sin articulación de formas de acción, operando así con abstracciones predominantemente empíricas. Los otros dos sujetos alcanzaron el nivel III, demostrando la capacidad de reflexionar sobre el camino recorrido de n a n' , pudiendo reconstruir n mediante el análisis y la coordinación de sus propias acciones. Por lo tanto, la comparación entre los desempeños muestra que los sujetos del nivel III desarrollan la noción de número mediante la abstracción reflexiva, especialmente mediante la comprensión del camino, la ordenación y la inversión de las operaciones aritméticas.

Palabras clave: Inversión de Operaciones Aritméticas. Reversibilidad. Demostraciones Piagetianas. Enseñanza de las Matemáticas.

1 INTRODUÇÃO

As operações aritméticas estão presentes nas mais diversas situações do cotidiano infantil — em brincadeiras, na partilha de brinquedos, na compra de doces, entre outras. Tais situações, recorrentes no dia a dia, costumam ser resolvidas com facilidade pelas crianças. No entanto, ao se depararem com contextos semelhantes no ambiente escolar, frequentemente enfrentam dificuldades para assimilar as relações de inversão que caracterizam as operações fundamentais, como a adição e a subtração, e, de forma ainda mais acentuada, a multiplicação e a divisão. Nesse sentido, Piaget (1977/1995, p. 43) observa que a criança “somente consegue com bastante lentidão assimilar as relações de inversão que caracterizam a adição e a subtração e, sobretudo, a multiplicação e a divisão, mesmo que frequentemente se trate apenas do dobro e da metade”.

A necessidade de quantificação para organizar o mundo impõe a construção de conhecimentos numéricos, os quais devem ser internalizados pelo sujeito e atuam tanto como instrumentos para a resolução de problemas quanto como objetos de estudo, considerando suas propriedades e relações.

Na prova intitulada "A Inversão das Operações Aritméticas", que será apresentada no item 3 deste trabalho, Piaget (1977/1995) propõe uma sequência de níveis que possibilitam identificar o estágio de desenvolvimento em que a criança se encontra. No nível IA, observa-se uma ausência de diferenciação dos objetos manipulados. O nível IB é marcado pelo êxito nas construções do cogumelo e do cubo, e pelo início de uma diferenciação baseada na reflexão sobre diferenças qualitativas (como forma, tamanho, entre outras). No nível IIA, o sujeito reconhece a necessidade de reencontrar n a partir de n' , compreendendo, portanto, a exigência das operações inversas; entretanto, ainda não percebe a importância da conservação da ordem dos elementos ao reverter a operação. Já no nível IIB, o sujeito reconhece a necessidade de uma ordem específica, embora ainda não antecipe, de forma dedutiva, a possibilidade de reconstrução de n . Do ponto de vista da abstração reflexionante, esse percurso se mostra complexo, pois “[...] para dar conta da formação das inversões operatórias, necessita, ainda, no nível das operações ‘concretas’, de uma abstração pseudoempírica [...]” (PIAGET, 1977/1995, p. 52). Por fim, no nível III — correspondente ao início do pensamento reflexivo — os sujeitos demonstram capacidade de resolver os problemas de inversão das operações por meio da reconstituição dedutiva do número n .

O presente estudo tem como finalidade compreender o processo de inversão das operações aritméticas sob a ótica da abstração reflexionante, utilizando-se do método clínico piagetiano, com o objetivo de aprofundar a compreensão do conceito de abstração reflexionante no escopo da teoria piagetiana.

Para isso, apresenta-se, inicialmente, uma breve revisão sobre a abstração reflexionante e o conhecimento lógico-matemático, à luz da epistemologia genética, examinando como os sujeitos constroem tais conhecimentos a partir das provas aplicadas. Ao final, procede-se à análise dos resultados obtidos, com base nos pressupostos do método clínico piagetiano.

2 A ABSTRAÇÃO REFLEXIONANTE E O CONHECIMENTO LÓGICO-MATEMÁTICO

De acordo com a epistemologia genética, o conhecimento é construído a partir da interação entre sujeito e objeto, podendo ocorrer através de dois tipos de experiência: a física ou a lógico-matemática. A experiência física consiste em retirar (abstrair) dos objetos ou das ações, em suas características materiais, qualidades que lhes são próprias como cor, peso, volume, espessura, forma, etc. (PIAGET, 1974). Por sua vez, a experiência lógico-matemática ou a abstração reflexionante “[...] retira suas informações das coordenações das ações, coordenações que ocorrem no universo endógeno e, portanto, não são observáveis; são “percebidas” somente pelo sujeito que a produz” (BECKER, 2012, p.52). Nesse sentido, Kamii distingue conhecimento físico de conhecimento lógico-matemático, exemplificando:

O fato de que uma bola rola em uma rampa, que uma certa combinação de materiais produz cristais e que certos objetos flutuam na água é um exemplo de conhecimento físico. A fonte do conhecimento físico está, portanto, principalmente no objeto, ou seja, na forma com que o objeto proporciona ao sujeito oportunidades para observação. O conhecimento lógico-matemático, por outro lado, consiste nas relações que o sujeito cria e introduz nos, ou entre objetos. Um exemplo de conhecimento lógico-matemático é o fato de que, no exercício de inclusão da classe, existem mais cubos que cubos azuis. [os cubos] não estão organizados dentro da classe de "todos os cubos" compostos das subclasse "cubos amarelos" e "cubos azuis" até que a criança crie essa organização hierárquica e introduza-a entre os objetos. (KAMII e DEVRIES, 1991, p. 32-33).

A coordenação das ações feitas pelo sujeito leva ao conhecimento lógico-matemático, cuja construção possui mecanismo próprio: a abstração reflexionante. Esta apoia-se sobre os objetos físicos ou sobre os aspectos materiais da ação (abstração empírica, a qual retira características dos observáveis) e, além disso, "sobre todas as atividades cognitivas do sujeito (esquemas ou coordenações de ações, operações, estruturas, etc.), para delas retirar certos caracteres e utilizá-los para outras finalidades (novas adaptações, novos problemas, etc.)" (PIAGET, 1977/1995, p.6). Assim, por exemplo, quando o sujeito compara dois conjuntos numéricos, o dos naturais (N) e o dos inteiros (Z), percebe que, segundo a relação Z , formam um grupo e um anel, e os N , somente um monoide, ou ainda, que o conjunto Z maior que N . Esta relação foi criada pelo sujeito ao relacioná-los, ou seja, a relação não está nem em Z e nem em N . Podemos comparar essa situação com um sujeito que, ao brincar com carrinhos, organiza-os em uma fileira e percebe que, ao contar, da esquerda para direita,

obtém sempre o mesmo resultado, o mesmo número que obteve anteriormente quando os contou no sentido inverso. De acordo com Piaget (1967/1973, p.350) “[...] é a ação de ordenar que os põe em fileira, é a ação de reunir que lhes confere uma soma enquanto totalidade lógica ou numérica, é a ação de estabelecer correspondência que lhes confere a possibilidade de equivalência numérica”.

Dessa forma, a abstração reflexionante pode ser observada em todos os estádios, desde o sensório-motor até o operatório formal, prosseguindo por toda a vida, comportando dois aspectos essenciais: o reflexionamento e a reflexão. O reflexionamento implica retirar qualidades das coordenações das ações prévias, ou seja, transferir, para um patamar superior, aquilo que foi retirado de um patamar inferior. Já a reflexão consiste em uma reconstrução ou reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi transferido do inferior. Assim, pode-se dizer que a abstração é reflexionante em dois sentidos complementares:

[...] Em primeiro lugar ela transporta a um plano superior o que colhe no patamar precedente (por exemplo, ao conceituar uma ação); e designaremos esta transferência ou esta projeção com o termo ‘reflexionamento’ (*réflexionnement*). Em segundo lugar, ela deve necessariamente reconstruir sobre o novo plano B o que foi colhido do plano de partida A, ou pôr em relação os elementos extraídos de A com os já situados em B; esta reorganização, exigida pelo processo de abstração reflexionante, será designada por ‘reflexão’ (*réflexion*). (PIAGET, 1977/1995, p.6)

Os dois aspectos inseparáveis da abstração reflexionante, o reflexionamento e a reflexão, produzem diferenças qualitativas, além de diferenças de grau. No primeiro patamar (reflexionamento mais elementar), final do sensório-motor e início do simbólico, o sujeito consegue representar ações por ele desenvolvidas; no segundo, consegue reunir as representações em um todo coordenado; no terceiro, o sujeito consegue estabelecer comparações e apropriar-se das estruturas formadas, ou seja, estando a ação total reconstituída, é comparada a outras, análogas ou diferentes, levando aos patamares sucessivos. Esta desdobra-se em duas categorias: a pseudoempírica e a refletida. A pseudoempírica “[...] retira dos observáveis não suas características, como na abstração empírica, mas o que o sujeito colocou neles” (BECKER, 2012, p.36), à medida que compara, diferencia e integra o conhecimento às suas estruturas cognitivas. A abstração pseudoempírica pode ser verificada, por exemplo, quando o sujeito ordena os elementos de um conjunto, ou seja, do mais largo ao mais estreito, conta doces, etc. No que se refere à abstração empírica, a leitura dos resultados é feita a partir de objetos ou das ações em suas características materiais, enquanto que, na pseudoempírica, as propriedades são introduzidas nesses objetos pela atividade do sujeito.

Quando o sujeito toma consciência das coordenações das ações, ocorre a abstração refletida, ou seja, ele aplica esse conhecimento em situações análogas, generaliza e assimila novos conteúdos,

não havendo mais a necessidade de ação material sobre os objetos para compreendê-los. Com isso, o sujeito opera suas ações formalmente, à medida que diferencia e integra o novo conhecimento em patamares superiores. Isso acontece, por exemplo, quando o sujeito se dá conta de que a operação $4 + 4 + 4$ é igual a 4×4 , ou ainda, ao tentar descobrir um número desconhecido, de que pode fazê-lo a partir das operações inversas.

Nesse sentido, a construção das “quantificações e a reversibilidade, viabiliza-se o conjunto das estruturas operatórias “concretas” que, sendo lógico-matemáticas, são extraídas das atividades do sujeito”. (BECKER, 2011, p.216). A operatividade consolida-se “somente quando o pensamento da criança torna-se reversível” (PIAGET, 1978, p.16), ou seja, quando ela é capaz de realizar uma ação e retornar à ação inicial, compreendendo o objeto em sua totalidade. A reversibilidade é a capacidade de ir e vir em pensamento; é com ela que surgem as primeiras operações concretas.

A partir dessas estruturas operatórias, tornam-se possíveis “reflexões sobre reflexões anteriores” (PIAGET, 1977/1995), ou seja, começa a elaboração do pensamento reflexivo. Essas estruturas estão organizadas em estádios do desenvolvimento que vão do sensório-motor ao operatório formal, como descrito pela epistemologia genética. No sensório-motor, o sujeito constrói esquemas de ação para assimilar, ou seja, agir sobre o meio, comportando a estrutura do objeto permanente, do espaço, das sucessões temporais e das relações causais. No pré-operatório, desenvolve as funções simbólicas, que possibilita o aparecimento das representações mentais; no operatório concreto, a criança mostra a capacidade de seriar ou classificar objetos, bem como incluí-las numa classe ou série, a partir de objetos e situações concretas. Nesse estádio, a criança desenvolve a capacidade de representar uma operação no sentido inverso de uma anterior, ou seja, torna-se capaz de reversibilidade, operando sobre dados da realidade, ainda dependente das ações sobre objetos. Por fim, no operatório formal, o sujeito não depende mais da ação sobre objetos, consegue fazer abstrações reflexionante, de tipo refletidas, formulando hipóteses; é capaz de pensamento hipotético-dedutivo ou lógico-matemático. Com isso, as estruturas cognitivas alcançam seu nível mais elevado de desenvolvimento, formando a capacidade de raciocinar sobre hipóteses e ideias abstratas.

A partir dessa breve revisão sobre a abstração reflexionante e o conhecimento lógico-matemático, passa-se à descrição e à análise das entrevistas realizadas.

3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA APLICAÇÃO DAS PROVAS

Para a realização deste estudo, as entrevistas foram gravadas e transcritas, e os depoimentos colhidos foram analisados com base na teoria piagetiana. A prova “A Inversão das Operações Aritméticas”, apresentada por Jean Piaget (1977/1995), foi aplicada para nove sujeitos, na faixa etária

entre 6 a 13 anos, com a finalidade de verificar se eles conseguem explicar o caminho percorrido para obter o valor inicial n . Desses, destacam-se três, em função dos sujeitos entrevistados encontrarem-se em níveis repetidos. Essa prova consiste em solicitar à criança que escreva, em uma folha de papel, o número inicial n , sem que mostre ao experimentador. A seguir, solicita-se ao sujeito que adicione o número 3 ao valor escolhido e depois, multiplique por 2 o resultado obtido e acrescente mais 5, tendo como resultado o número $n' = 2(n+3)+5$. Após realizar as operações, o sujeito anuncia o resultado obtido ao experimentador. De acordo com Piaget (1977/1995, p.43), “[...] para reencontrar n a partir de n' , não basta inverter as operações: é preciso inverter a sua ordem”. Para analisar a segunda condição, foram propostas mais duas provas: a construção de um “cogumelo” e de um cubo. Ao final, foi solicitada a comparação entre as três provas a fim de instigar os sujeitos a construíssem o conceito de reversibilidade das operações aritméticas.

Para a realização das provas, com os sujeitos de 7-8 anos, em média, começa-se sempre pela construção de um “cogumelo”, apresentando 7 peças de madeira em desordem. Pergunta-se à criança o que se pode fazer. Em seguida, pede-se que desmonte o cogumelo, organizando os pedaços na ordem em que se desmontou. Pergunta-se à criança sobre a nova ordem, comparando com a ordem de construção.

Em seguida, passa-se à construção do cubo, utilizando 8 pequenos cubos. Pede-se que, novamente, identifique a ordem e realize uma comparação entre a construção do cubo e a do cogumelo.

Após a aplicação das duas provas, aplica-se o problema do cálculo. Solicita-se às crianças (a partir de 7-8 anos) que registrem, sobre uma folha, um número n de dois algarismos e que o contornem com um círculo, depois, por escrito, ela deve acrescentar ao número mais 3, multiplicar o resultado por 2 e, por fim, adicionar 5. Pergunta-se se o conhecimento do resultado n' é necessário para encontrar n . Questiona-se o porquê. Em seguida, pede-se que identifique a ordem das operações e que realize uma comparação entre o jogo do cálculo e o da construção do cogumelo. Nesta prova, foi necessário observar a idade dos sujeitos entrevistados para a sua adequação. No caso de sujeitos de até 7 anos, cuja notação das operações aritméticas ainda não está construída, utilizaram-se quadrinhos de madeira para a manipulação e a aplicação da prova. Por fim, solicita-se uma comparação geral entre as três provas.

A seguir, são apresentadas a transcrição e a análise, respectivamente, de cada sujeito entrevistado na realização das provas.

Quadro 1: Transcrição das entrevistas

Prova	EVE (6;8)
Cogumelo	<p>- O que se pode construir com estas peças de madeira? – <i>A gente pode formar uma pirâmide.</i> Agora vou acrescentar mais duas peças às que você tem. Por que você preferiu montar assim? – <i>Porque ficava a (peça) maior no lugar do mais “médio”.</i> Importa ou não importa, o tamanho das peças para você montar? – <i>Não importa.</i> Agora desmonte. Importou a ordem das peças para montar e desmontar? – <i>Eu montei um em cima do outro.</i> Como você fez para desmontar? – <i>Eu comecei por esta, depois por esta,... (aponta para cada peça, em ordem crescente de tamanho).</i> Há alguma coisa parecida na maneira de montar e desmontar? – <i>Uma coisa que não seja igual àquela forma. Eu observei que fica meio colorido.</i></p>
Cubo	<p>- Monte um cubo. – (Não sabia o que era cubo). No formato de dado. Você presta atenção quando tu colocas as peças para formar o dado? – <i>Eu vejo onde é que eu vou botar antes de botar.</i> Quando você montou o cogumelo, o dado (cubo), observou alguma coisa parecida? – <i>Parece uma caixa de encomenda.</i> Quando você montou o cogumelo e quando você montou o dado, a maneira de montar foi a mesma? – <i>Não, porque cada um tem a sua forma.</i></p>
Jogo dos cálculos	<p>- Coloque a quantidade de fichas que quiser em cima da mesa. Acrescenta mais três fichas. Acrescenta mais cinco. Você acredita-se que eu possa saber quantas fichas colocou sobre a mesa na primeira vez? – <i>Não.</i> Diga quantas fichas há ao total. – <i>Dezoito.</i> Então você pegou 10 fichas. Eu acertei? – <i>Acertou.</i> Como será que eu acertei? – <i>Tu contou.</i> O valor total que você me disse me ajudou a saber quantas fichas havia preparado no início? – <i>Ajudou um pouco.</i></p>

A partir da entrevista realizada (Quadro 1), percebe-se que EVE representou o objeto “*cogumelo*” a partir de um substituto deste, uma “*pirâmide*” (Figura 1). Tem claramente consciência da ordem necessária para a construção, bem como da desmontagem do cogumelo. Quanto à demolição, as peças são colocadas em ordem à medida que se desmonta, mas não são observadas a ordem direta e inversa das ações. Isso indica “que ainda não há reversibilidade” (PIAGET, 1977/1995, p. 47), permanecendo no nível da reversibilidade incompleta. O mesmo acontece com o cubo e com as fichas (Figura 2), ou seja, “nem a inversão das operações, nem o conhecimento de n ”(ibidem, p.48), fizeram com que o sujeito compreendesse como reencontrar n . De acordo com Piaget (1977/1995), o sujeito encontra-se no nível IB, concentrando-se apenas no conteúdo, sem relacionar as formas de ações, caracterizando uma abstração empírica. Além disso, pode-se constatar uma abstração pseudoempírica, pois é mais fácil reconstituir o processo do que verbalizá-lo.

Figura 1- Peças do Cogumelo



Figura 2 – Quadrados de madeira



Quadro 2: Transcrição das entrevistas

Prova	CAI (11;8)
Cogumelo	<p>- Com cinco peças, monte um cogumelo. Por que você montou assim? – <i>Porque ele é arredondado e virado para cima</i>. O que foi preciso você pensar para montá-lo? – <i>Debaixo para cima, do maior para o menor</i>. Importou ou não importou o tamanho das peças? – <i>Importou</i>. Como você faria para desmanchar o cogumelo? – <i>Empurrar (tirou peça por peça)</i>! Por que você escolheu tirar peça por peça? <i>Para não fazer bagunça</i>.</p>
Cubo	<p>- Com estes dados, monte um cubo. – Um cubo? Um “grande dado”. Você observou em qual lugar colocar cada peça? – <i>Não</i>. Como você fez para desmontá-lo? – <i>Tirei as peças duas a duas da parte superior e, nas peças debaixo, apenas as separei</i>. Você se preocupou em qual peça retirar primeiro? – <i>Se eu pegasse as debaixo, ia cair tudo</i>. Qual relação você pode obter ao montar e desmontar o cogumelo e o cubo? - <i>De tamanho</i>. Há alguma coisa parecida na maneira de montar e desmontar? – <i>Não</i>. (Cogumelo) Do maior para o menor. (Cubo) Aqui tanto faz, pois são do mesmo tamanho.</p>
Jogo dos cálculos	<p>- Vamos jogar o Jogo dos Cálculos! Pense em um número, registre-o e circule-o. Agora some 3 a este número. Dobre o resultado. Some mais cinco. Quanto deu o total? – <i>Vinte e cinco</i>! Você pensou no número “7”? – (<i>Sorriso</i>). Será que eu adivinhei? – <i>Você fez menos 5, dividiu por 2 e depois tirou 3</i>. Por que você acha que pensei assim. – <i>Fazer ao contrário. Todas as contas, de trás para frente</i>. O que você acha que tem de relação entre as montagens do cogumelo, do cubo e do jogo dos cálculos? – (<i>Cogumelo</i>) Do menor para o maior e depois eu volto, do menor para o maior. (<i>Cubo</i>) Não vi diferença. Só tirava ele (as peças) e são do mesmo tamanho.</p>

CAI (Quadro 2) inicia sua construção a partir das características do objeto (abstração empírica) e o mesmo acontece com o cubo (Figura 3). No jogo dos cálculos, quando foi perguntado ao sujeito “*Será que eu adivinhei?*”, claramente notou-se que ele já havia refletido previamente sobre suas ações, ou seja, ações interiorizadas (organização lógico-dedutiva), passando para uma abstração refletida, nível III, sem a necessidade de reconstituições sucessivas. Assim, descreveu, oralmente, as operações inversas e necessárias para encontrar n , assim como registrou, em um papel, sua ideia expressa oralmente, como mostra na figura 4 (PIAGET, 1977/1995).

Figura 3- Comparação das provas



Figura 4 – Jogo dos cálculos

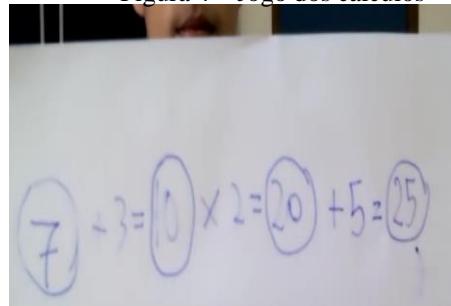


Tabela 3: Transcrição das entrevistas

Prova	ROB (12;11)
Cogumelo	<p>- O que se pode construir com esses 7 pedaços de madeira? - <i>Uma pirâmide circular</i>. Por que você está montando desta maneira? – <i>Porque é a única coisa que eu pensei que pode ser construída com essas peças circulares</i>. O que você pensou para montar? – <i>Ir das maiores para as menores</i>. Pode-se construir mais alguma coisa com essas peças? – <i>Não sei</i>. Não pensou em mais nada? – <i>Não</i>. Desmonte. Por que você escolheu desmontar desta maneira? – <i>Porque foi a maneira mais rápida</i>. Para montar e para desmontar, você utilizou a mesma estratégia? – <i>Praticamente</i>. Por quê? – <i>Porque foi a maneira mais rápida que encontrei para montar e para desmontar</i>. Mas haveria outra maneira de desmontar? – Sim. Qual? – <i>Cada peça colocada para um lado</i>. Só haveria uma maneira de desmontar sem desmanchar toda a pirâmide? – <i>Não, pode tirar as primeiras, as menores</i>. Como “tirar as menores?” – <i>A pirâmide estaria montada e eu começaria das menores até as maiores, só que eu não fiz isso</i>. Só há esta maneira? – <i>Não</i>. Qual seria a outra? – <i>Simplesmente tirar uma parte e deixar elas de lado</i>. Sim, mas teria que começar sempre de cima para baixo ou teria outra maneira de desmontá-la completamente. <i>Não, pode começar de baixo para cima</i>. Há como começar de baixo para cima? – <i>Tenta</i>. Tem certeza? – <i>Não</i>. Então, qual é a única maneira que há? – <i>Começar de cima para baixo</i>.</p>
Cubo	<p>- Construa um grande cubo, utilizando 8 pequenos cubos. – <i>Monta</i>. Ao montar, você pensou em uma posição certa para cada peça? – <i>Não</i>. Como você pode desmanchar o cubo? – <i>Tirando as peças de cima para baixo</i>. Ao desmontar, você pensou qual peça retirar primeiro? – <i>Sim, as de cima</i>. Você poderia comparar a montagem e a desmontagem do cogumelo e a do cubo? – <i>Poderia</i>. De que maneira? – <i>Da forma em que o cubo e o cogumelo devem ser desmontados de cima para baixo, ou se não toda a estrutura será desmanchada</i>.</p>
Jogo dos cálculos	<p>- Pense em um número, registre-o no papel e circule-o. Adicione a este o número 3. Agora, dobre este valor. E, por fim adicione 5. Qual número obteve? – <i>37</i>. Você pensou no número 13. – <i>Sim</i>. Como eu descobri o número que você pensou? – <i>Fazendo a forma inversa, ou seja, diminuindo 5 de 37 e dividindo o resultado por 2 e diminuindo 3 do resultado da divisão, que resultaria no número 13</i>. Qual relação existe entre essas três atividades? - <i>A matemática</i>. E com relação à atividade do cubo, do cogumelo e a do jogo dos cálculos? – <i>Sempre para obter um resultado diferente fazemos a forma inversa, no caso do cogumelo desmontava com a forma inversa, do cubo também e para descobrir o número que eu pensei deveria fazer a forma inversa</i>.</p>

No nível III, ROB compara a construção do cogumelo (Figura 5) e do cubo (Figura 6) e, quando lhe é perguntado se poderia comparar a montagem e a desmontagem do cogumelo e a do cubo, respondeu que poderia. De que maneira? “*Da forma em que o cubo e o cogumelo devem ser desmontados de cima para baixo, ou senão toda a estrutura será desmanchada*”. Nesse nível, torna-se possível, por abstração refletida, encontrar n a partir de n' , quando o experimentador pergunta:

Como será que eu descobri o número que você pensou? “*Fazendo a forma inversa, ou seja, diminuindo 5 de 37 e dividindo o resultado por 2 e diminuindo 3 do resultado da divisão, que resultaria no número 13*”. Ainda nesse nível, é fácil a comparação geral entre as três provas apresentadas ao sujeito, sendo esta explicitada de forma clara, por abstração refletida, “*Sempre, para obter um resultado diferente, fazemos a forma inversa, no caso do cogumelo desmontava com a forma inversa, do cubo também e para descobrir o número que eu pensei deveria fazer a forma inversa*”. O sujeito explica de forma clara, a partir de uma reflexão de nível superior, assimilando as relações de inversão caracterizadas pelas operações (PIAGET, 1977/1995).

Figura 5: Peças do cogumelo



Figura 6: Peças do cubo



A partir das análises realizadas anteriormente e, tendo como suporte a transcrição das entrevistas, tecemos algumas considerações acerca das provas realizadas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados obtidos neste estudo preliminar possibilitaram identificar o estágio de desenvolvimento cognitivo em que se encontram as crianças no que se refere à noção de reversibilidade (réversibilité). Tal constatação foi viabilizada por meio da aplicação da prova operatória denominada "A Inversão das Operações Aritméticas", concebida por Jean Piaget (1977/1995), empregando-se o método clínico piagetiano como instrumento investigativo.

As ações que precedem cada nova tentativa experimental seguem uma progressão contínua de abstrações. Por meio da coordenação sucessiva das ações exercidas pelo sujeito sobre o objeto – no caso, o cogumelo – o indivíduo gradualmente apreende a necessidade de uma ordenação, a qual emerge de abstrações empíricas, já discerníveis no nível IB. No entanto, no nível IA, observa-se que o sujeito se satisfaz com empilhamentos aleatórios, sem estabelecer qualquer correspondência sistemática entre as dimensões das peças, sendo esta forma inicial de correspondência denominada abstração instrutiva. As ações não operatórias realizadas com o cogumelo possuem, ainda assim, valor qualitativo para a compreensão incipiente da reversibilidade.

No que tange à construção do cubo maior, observa-se que o sujeito, situado no nível IB, manipula as peças menores sem refletir sobre as próprias ações, atentando-se unicamente ao conteúdo sensorial. Tal comportamento torna-se evidente quando se solicita que EVE compare as duas provas (cogumelo e cubo): a criança menciona que o cogumelo “fica meio colorido” e que o “cubo parece uma caixa de encomenda”, sem, contudo, estabelecer uma correlação entre as formas estruturais de ambos. Com relação à noção de ordem, as respostas de EVE revelam que, embora já se manifeste a ideia de retirar e recolocar, o sujeito ainda não é capaz de comparar qualitativamente as ações realizadas, tampouco formular uma nova abstração a partir dessa comparação.

Na terceira prova — o jogo dos cálculos —, o sujeito no nível III revela-se capaz de refletir sobre o percurso realizado de n a n' , reconhecendo a importância de retornar ao valor inicial n mediante a análise consciente de suas coordenações de ações. Essa capacidade, caracterizada como abstração reflexionante, culmina numa abstração refletida. Tal desenvolvimento não é observado no nível IB, onde o sujeito ainda necessita reconstituir suas ações a partir dos objetos manipulados, procedimento menos exigente do que a tomada de consciência das etapas sucessivas e das exigências inerentes ao processo de abstração.

Assim, no nível III, ao perceber que é necessário reencontrar n a partir de n' — mesmo que de forma pseudoempírica ou por reconstituição — a abstração passa a não se restringir mais à mera coordenação de ações ou à simples comparação, mas envolve a análise crítica do percurso do ponto de partida ao ponto de chegada. Isso configura uma forma mais elaborada de abstração reflexionante, conforme propõe Piaget (1977/1995). Quando o sujeito comprehende que é possível realizar a reversão de n para n' e vice-versa, abstraindo o itinerário percorrido, ele passa a dominar a inversão das operações — evidência disso pode ser vista na resposta de CAI à indagação do experimentador: “Será que eu adivinhei?” — ao que ele replica: “Você fez menos 5, dividiu por 2 e depois tirou 3”. Trata-se aqui de um indício de pensamento reflexivo que, segundo Piaget, permite ao sujeito resolver integralmente o problema (incluindo o percurso, a inversão das operações e a própria ordem) mediante um raciocínio essencialmente dedutivo (PIAGET, 1977/1995, p. 56).

Dessa forma, ao comparar globalmente as três provas, observa-se que os sujeitos situados no nível III alcançam a noção de número por meio de uma abstração refletida, construída a partir da análise do percurso, da ordenação e da inversão operatória. Ressalte-se, contudo, que essa forma de abstração reflexionante, associada à tomada de consciência, está inserida em um processo evolutivo contínuo, permeado por diversas subcategorias de abstrações pseudoempíricas e refletidas. Em síntese, pode-se afirmar que a abstração reflexionante constitui uma generalização originada de características extraídas empiricamente dos objetos. À medida que se desenvolve, tal abstração

consolida-se com base nos “[...] progressos da conceituação, das relações de ordem, ou das estruturas lógico-aritméticas em geral e, sobretudo, da métrica espacial e dos sistemas de referência” (PIAGET, 1977/1995, p. 288).

REFERÊNCIAS

- BECKER, F. **Educação e construção do conhecimento**. 2^a ed. Porto Alegre: Penso, 2012. 200 p.
- _____. **Educação e construção do conhecimento**. Porto Alegre. Artmed, 2001.
- _____. **O caminho da aprendizagem em Jean Piaget e Paulo Freire: da ação à operação**. 2^a Ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2011.
- _____. **Epistemologia do professor de matemática**. Petrópolis: Vozes, 2012. 496 p.
- KAMII, C.; DEVRIES, R. **O conhecimento físico na educação pré-escolar - implicações da teoria de Piaget**. Porto Alegre: Artmed, 1991.
- _____. [1977] **Abstração Reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. 292 p.
- _____. [1967] **Biologia e conhecimento**. Petrópolis: Vozes, 1973.
- _____. **Fazer e compreender**. São Paulo: Melhoramentos; EDUSP, 1978. 186p.
- PIAGET, J.; GRECO, P. **Aprendizagem e conhecimento**. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974.