

**MOVIMENTOS UNIDIMENSIONAIS EM SUSPENSÃO DE SEDIMENTOS PELÍTICOS
EM ESCOAMENTOS COM SUPERFÍCIE LIVRE**

**ONE-DIMENSIONAL MOVEMENTS IN SUSPENSION OF PELITIC SEDIMENTS IN
OPEN CHANNEL FLOW**

**MOVIMIENTOS UNIDIMENSIONALES EN SUSPENSIÓN DE SEDIMENTOS PELÍTICOS
EN FLUJOS DE SUPERFICIE LIBRE**

 <https://doi.org/10.56238/arev7n8-053>

Data de submissão: 06/07/2025

Data de publicação: 06/08/2025

Márcia Maria Guimarães

Doutora em Ciências em Engenharia Civil / Recursos Hídricos
Instituição: Universidade Estadual de Montes Claros (UNIMONTES)

Endereço: Minas Gerais, Brasil
E-mail: marcia.guimaraes@unimontes.com

RESUMO

Neste artigo adota-se uma solução analítica Fickiana para a equação unidimensional de advecção-difusão do movimento de sedimentos pelíticos em suspensão, em escoamentos com superfície livre. Consideram-se resultados de experiências realizadas no laboratório de hidráulica da Universidade Estadual do Colorado, em Fort Collins. Um dispositivo foi elaborado para a injeção instantânea de uma solução de traçador fluorescente uniformemente distribuída através da seção transversal. Cada experiência consistiu na injeção da mesma quantidade de traçador e do registro contínuo com um fluorímetro Turner Modelo 111, do tempo de passagem da nuvem fluorescente através de uma seção transversal a jusante. Os resultados foram analisados em conjunto, como se tratasse de uma única injeção, e, também por experiência. Eles mostraram que para prever, com precisão, o comportamento dum suspensão de corante através das seções transversais do canal, devem-se considerar as variações dos coeficientes de dispersão e da velocidade média de transporte em função do tempo. Para as aplicações nos escoamentos naturais, o modelo poderá ser calibrado e validado com uma única injeção de traçadores e a determinação dos coeficientes de dispersão e velocidades médias dos dispersantes em função do tempo, como apresentado neste estudo.

Palavras-chave: Equação de Advecção-Difusão. Sedimentos Finos. Traçadores Fluorescentes.

ABSTRACT

In this paper one Fickian analytical solution of the one-dimensional advection-diffusion equation describing the fine sediment suspended movement in open channel was applied. Experiments carried out in hydraulics laboratory at Colorado State University in Fort Collins are considered. A device was developed to inject instantaneously into the flume, a fluorescent dye solution in such a way that the initial distribution of dispersant approximated an instantaneous plane source with the dispersant uniformly distributed over the entire flow cross section. Each experiment consisted of the same tracer quantity immersion and the continuous record, with a Model 111 Turner Fluorometer, of the transit time of the fluorescent dye cloud through a downstream cross section. The results were analyzed altogether, considering there was only one injection, and also considering each experiment separately. They showed that to estimate precisely the behavior of a dye suspension across the channel transversal sections, it must consider the dispersion coefficients and the transport mean particles velocity

variations as time functions. For the natural watercourses' applications, the model may be adjusted and validated with only one tracer immersion followed by the determination of the dispersion coefficients and mean dispersant particles velocities as time functions, as suggested in this study.

Keywords: Advection-Diffusion Equation. Fine Sediments. Fluorescent Tracers.

RESUMEN

Este artículo adopta una solución analítica Fickiana para la ecuación unidimensional de advección-difusión para el movimiento de sedimentos pelíticos en suspensión en flujos de superficie libre. Se consideran los resultados de experimentos realizados en el laboratorio de hidráulica de la Universidad Estatal de Colorado en Fort Collins. Se diseñó un dispositivo para la inyección instantánea de una solución trazadora fluorescente distribuida uniformemente a lo largo de la sección transversal. Cada experimento consistió en inyectar la misma cantidad de trazador y registrar continuamente el tiempo que tarda la nube fluorescente en atravesar una sección transversal aguas abajo con un fluorímetro Turner Modelo 111. Los resultados se analizaron colectivamente, como si se tratara de una sola inyección, y también experimentalmente. Demostraron que, para predecir con precisión el comportamiento de una suspensión de colorante a lo largo de las secciones transversales de un canal, es necesario considerar las variaciones en los coeficientes de dispersión y la velocidad media de transporte en función del tiempo. Para aplicaciones en flujos naturales, el modelo puede calibrarse y validarse con una sola inyección de trazadores y la determinación de los coeficientes de dispersión y las velocidades medias de los dispersantes en función del tiempo, como se presenta en este estudio.

Palabras clave: Ecuación de Advección-Difusión. Sedimentos Finos. Trazadores Fluorescentes.

1 INTRODUÇÃO

A utilização dos meios fluviais e marinhos como locais de lançamento de rejeitos de origem industrial, agrícola, doméstica ou nuclear, teve um crescimento considerável a partir de meados da década de quarenta, após a II Guerra Mundial. Isso resultou num aumento da degradação das bacias hidrográficas devido à poluição de suas águas. (GUIMARÃES, 2006; GUIMARÃES e WILSON-JR, 2005). Na descrição dos mecanismos que regem o movimento desses materiais, inclusive as trocas da suspensão para o leito e do leito para a suspensão, pode-se utilizar a técnica de traçadores – radioativos, corantes e químicos, juntamente com os métodos clássicos de medições hidráulico-sedimentológicas. Os traçadores radioativos são muito úteis nos estudos relacionados com o mecanismo do movimento de partículas em escoamentos com superfície livre pois permitem medir e acompanhar, com precisão, as características cinemáticas e dinâmicas do escoamento e das partículas em estudo. Enquanto os traçadores descrevem a quantidade de transporte, as trajetórias e a dispersão das partículas, as medições hidráulico-sedimentológicas determinam as características do escoamento e as propriedades das partículas líquidas e sólidas (GUIMARÃES, 2006; GUIMARÃES e WILSON-JR, 2004, 2005, 2007, 2008, 2014).

Neste estudo consideram-se como sedimentos pelíticos aqueles cujos grãos não podem ser distinguidos à vista desarmada. É o caso geral dos sedimentos extremamente finos, cuja dimensão das partículas mais grossas não ultrapassa a faixa de 30 a 40 μm , de modo que o efeito da gravidade não é sentido de forma significativa. Na sua composição distinguem-se os compostos minerais (calcário, sílica, argila, etc.) e os orgânicos (ácidos humífero); os compostos minerais aparecendo em maior proporção que os orgânicos. Nas vasas, as matérias orgânicas estão associadas às argilas, formando o que se denomina de complexo argilo-humífero, que proporciona aos sedimentos pelíticos uma natureza coloidal acentuada. Esses sedimentos, depois de misturados através da seção transversa, são transportados com uma velocidade igual à velocidade média do escoamento e ao mesmo tempo, dispersos longitudinalmente pela ação combinada da difusão turbulenta e da advecção diferencial devida às variações espaciais do campo de velocidades. Num meio calmo, os sedimentos pelíticos são capazes de floacular e de formar produtos coesivos cujas velocidades de queda são superiores àquelas das partículas elementares. Nessas condições, a ação da gravidade passa a ser importante. Se os sedimentos coesivos se depositarem no leito do escoamento, as velocidades críticas necessárias para a sua recolocação em suspensão serão superiores às velocidades necessárias à manutenção do seu movimento em suspensão. Será necessário vencer as forças de coesão que aumentam com o tempo de consolidação do depósito, para arrancar tais partículas do fundo do escoamento (WILSON-JR, 1987; GUIMARÃES, 2006; GUIMARÃES e WILSON-JR, 2004, 2005, 2007, 2008, 2014).

Os poluentes tóxicos, metálicos e orgânicos, quando lançados nos escoamentos líquidos, encontram condições favoráveis (pH, salinidade, temperatura, etc.) e se fixam sobre os sedimentos pelíticos que, neste caso, são submetidos ao mesmo transporte e a mesma dispersão. As dispersões laterais e longitudinais das partículas de sedimentos podem reduzir o nível de concentração desses poluentes numa corrente turbulenta. Zonas de deposição também podem ser produzidas no interior do escoamento, onde as concentrações de poluentes atingem níveis perigosos para o ecossistema.

O conhecimento dos processos e mecanismos que controlam esses elementos poluidores no ambiente aquático é fundamental para a compreensão da dimensão dos impactos devidos às atividades antrópicas. No acompanhamento e simulação desses impactos, os modelos matemáticos surgem como ferramentas indispensáveis nas aplicações relacionadas com a gestão de bacias fluviais e marinhas, e na previsão do movimento de escalares em escoamentos com superfície livre, particularmente, em rios, estuários, lagos, reservatórios de usinas hidrelétricas e de abastecimento hídrico e decantadores de estações de tratamento de água e de esgotos. Para o uso correto desses modelos é indispensável que seja realizada uma descrição precisa do transporte e da dispersão de poluentes e dos sedimentos, principalmente por serem esses últimos vetores de poluentes tóxicos, orgânicos e/ou radioativos (GUIMARÃES, 2006).

O objetivo deste estudo refere-se às deduções das equações analíticas e numéricas unidimensionais, ao estabelecimento das condições iniciais e de contorno das aplicações necessárias para a calibração e validação dos modelos desenvolvidos. Para a calibração e validação dos modelos foram utilizados dados de experiências realizadas em canal de laboratório da *Colorado State University* por Sayre e Chang (1968) nas quais o poluente simulado por um traçador fluorescente foi injetado instantânea e uniformemente numa seção transversal do escoamento.

Destaca-se que a forma pela qual o poluente é introduzido no corpo de água influi no transporte e em sua dispersão ao longo do escoamento, constituindo-se de fator fundamental para a solução das equações diferenciais que descrevem tais comportamentos.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

2.1 EQUAÇÕES ANALÍTICAS DO MOVIMENTO UNIDIMENSIONAL

A equação geral da transferência turbulenta de partículas de sedimentos finos e poluentes conservativos nos escoamentos com superfície livre (FORTIER, 1975; WILSON-JR, 1987; GUIMARÃES, 2006; GUIMARÃES e WILSON-JR, 2004, 2005, 2007, 2008, 2014), é dada pela Equação (1),

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{c}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(D_m + D_{ij}) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} \right] \quad (1)$$

em que, \bar{c} é a concentração mássica média temporal de sedimento ou poluente conservativo; t é o tempo; \bar{u}_i são as componentes da velocidade média temporal da mistura água-sedimento; D_m é o coeficiente de difusão molecular; e D_{ij} é o tensor de segunda ordem das difusividades turbulentas da mistura.

A Equação (1) é muito utilizada em modelagem física, em que os termos advectivos representam o transporte de materiais através de um gradiente de concentração devido ao movimento do fluido, enquanto os termos difusivos referem-se ao espalhamento e difusão de concentrações mais altas para mais baixas em função do tempo. Vários processos naturais, como o movimento de sedimentos e poluentes nos escoamentos, o transporte de poluentes atmosféricos por fumaça ou poeira, a contaminação de águas subterrâneas, a disseminação de solutos químicos em solventes orgânicos e descargas de partículas sólidas, a intrusão de água do mar e a poluição térmica de sistemas fluviais, podem ser modelados pela equação.

Tendo em vista que a difusão molecular é desprezível em relação à difusão turbulenta, isto é, $D_m \ll D_{ij}$, a Equação (1) pode ser escrita,

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{c}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} \right) \quad (2)$$

Considerando-se ainda as seguintes hipóteses simplificadoras:

1. o fluxo advectivo de massa da mistura é igual à soma dos fluxos de massa líquida e sólida;
2. a mistura líquido-sólido é incompressível;
3. o escoamento médio é plano e a altura de água h é constante; o escoamento médio é, portanto, estacionário e homogêneo segundo o eixo longitudinal $0x$,

$$\bar{u} = \bar{u}(z), \quad \bar{v} \equiv 0, \quad \bar{w} \equiv 0 \quad (3)$$

4. as partículas são transportadas segundo a direção axial, pela corrente média $\vec{\bar{V}}$, e se decantam por gravidade. Consequentemente, a velocidade relativa média das partículas em relação ao

fluido, \vec{u}_{pf} , se reduz à sua componente \bar{w}_{pf} segundo o eixo vertical $0z$, ou seja, à componente segundo esse eixo da velocidade média de decantação das partículas, $-\bar{w}_p$;

5. as partículas são de mesma natureza e granulometria;
6. a declividade da superfície livre é muito pequena; e
7. as concentrações médias temporais dos sedimentos são reduzidas.

Tem-se então,

$$\begin{cases} \bar{u} \# \bar{u}_L \# \bar{u}_p \\ \bar{v} \# \bar{v}_L = 0 \\ \bar{w} \# \bar{w}_L = 0 \end{cases} \quad (4)$$

e,

$$\bar{w}_{pf} = -\bar{w}_p \cos i \# -\bar{w}_p \quad (5)$$

em que i é o ângulo formado entre a superfície da água com o plano horizontal, na direção do escoamento.

A Equação (2) torna-se,

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - \bar{w}_p \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right) \quad (6)$$

onde, \bar{u} é a componente da velocidade média do sedimento na direção longitudinal; D_x , D_y e D_z são os coeficientes locais de difusão turbulenta da mistura, nas direções longitudinal, transversal e vertical, respectivamente, considerados iguais aos coeficientes de difusão turbulenta do líquido.

Considerando-se que os coeficientes de difusão dependem unicamente do tempo, a Equação (6) torna-se,

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - \bar{w}_p \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = D_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2} \quad (7)$$

que é a equação de advecção-difusão-decantação de uma mistura de sedimentos num escoamento turbulento uniforme, num canal prismático, tal que o eixo x coincide com a direção do escoamento. O termo $\left(-\bar{w}_p \frac{\partial \bar{c}}{\partial z}\right)$ representa o fluxo gravitacional de sedimentos.

Sejam, as médias da velocidade e da concentração de sedimentos na vertical, dadas pelas Equações (8) e (9), respectivamente,

$$U = \frac{1}{h} \int_0^h \bar{u}(z') dz' \quad (8)$$

$$C_m(x, y, t) = \frac{1}{h} \int_0^h \bar{c}(x, y, z', t) dz' \quad (9)$$

e o desvio em relação a esta média, dado por,

$$\bar{c} = C_m + \bar{c}_d \quad (10)$$

de modo que,

$$\int_0^h \bar{c}_d dz' = 0 \quad (11)$$

Integrando-se a Equação (7) sobre a vertical e considerando-se as Equações (8) a (11), obtém-se,

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} = -U \frac{\partial C_m}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h \bar{u} \bar{c}_d dz' \right\} - \frac{1}{h} \left[-\bar{w}_p \bar{c} - D_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right]_0^h + D_x \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C_m}{\partial y^2} \quad (12)$$

sendo a componente vertical do fluxo médio das partículas, dada pela Equação (13),

$$\Phi_z(x, y, z, t) = \left[-\bar{w}_p \bar{c} - D_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right] \quad (13)$$

Na superfície livre ($z = 0$) o fluxo médio vertical das partículas é nulo, a passo que no fundo ($z = h$), tem-se,

$$\bar{\Phi}_z(x, y, z = h, t) = \left[-\bar{w}_p \bar{c} - D_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right]_{z=h} \quad (14)$$

com $\bar{\Phi}_z(x, y, z = h, t)$:

$= 0$ quando houver um equilíbrio entre os fluxos verticais: descente devido à decantação e ascendente devido ao mecanismo turbulento do escoamento. Nesse caso, todas as partículas serão transportadas em suspensão no meio da massa fluida.

< 0 quando as partículas que tocarem o leito forem retidas, se incorporando ao leito móvel e/ou formando um depósito de sedimentos.

> 0 quando a taxa de entrada em suspensão do material do leito for superior à taxa de deposição. Isso ocorrerá quando a velocidade de cisalhamento ou de atrito junto ao fundo for superior ao valor crítico que caracteriza o movimento incipiente do grão.

Dessa forma, tem-se,

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} = -U \frac{\partial C_m}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h \bar{u} \bar{c}_d dz' \right\} - \frac{1}{h} [\bar{\Phi}_z]_{z=h} + D_x \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C_m}{\partial y^2} \quad (15)$$

sendo que o primeiro termo da Equação (15) representa a taxa de variação da concentração média C_m numa vertical qualquer em relação ao tempo, enquanto os outros termos representam os diferentes tipos de diluição do traçador ou poluente.

Por analogia com a definição do tensor das difusividades turbulentas, D_{ij} , pode-se escrever,

$$(\bar{u} \bar{c}_d)_m = \frac{1}{h} \int_0^h \bar{u} \bar{c}_d dz' = -K_x \frac{\partial C_m}{\partial x} \quad (16)$$

em que o parâmetro K_x é denominado Coeficiente de Dispersão.

Quando K_x for independente das coordenadas, a Equação (15) toma a forma,

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} + \mathbf{U} \frac{\partial C_m}{\partial x} = (K_x + D_x) \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C_m}{\partial y^2} + \frac{1}{h} [\bar{\Phi}_z]_{z=h} \quad (17)$$

que mostra o efeito combinado da convecção diferencial e da turbulência sobre a diluição da mistura.

No caso em que os gradientes transversais de concentração são nulos e os valores médios sobre a vertical são iguais às médias na seção transversal, tem-se,

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} + \mathbf{U} \frac{\partial C_m}{\partial x} = (K_x + D_x) \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} - \frac{1}{h} [\bar{\Phi}_z]_{z=h} \quad (18)$$

Fazendo-se,

$$D_{px} = (K_x + D_x) \quad (19)$$

e substituindo na Equação (18), obtém-se,

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} + \mathbf{U} \frac{\partial C_m}{\partial x} = D_{px} \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} - \frac{1}{h} [\bar{\Phi}_z]_{z=h} \quad (20)$$

que é a equação do transporte unidimensional de uma mistura de sedimentos finos num escoamento turbulento com superfície livre.

A Equação (20) tem sido muito utilizada para descrever diferentes fenômenos físicos naturais, como a absorção de espécies químicas em leitos (LAPIDUS, 1952), a transferência de calor em filme de drenagem (ISENBERG e GUTFINGER, 1973), o resfriamento por fluidos de material rígido, como enrolamentos em turbogeradores (GANE e STEPHENSON, 1979), a modelagem do transporte de água em solos (PARLARGE, 1980), a disseminação de poluentes em lagos rasos (SALMON, LIGGETT e GALLAGHER, 1980), a poluição térmica em sistemas fluviais (CHAUDHRY, CASS e EDINGER, 1983), a intrusão de água salgada em aquíferos de água doce e o transporte de poluentes em rios e córregos (CHATWIN e ALLEN, 1985), e o estudo do movimento de partículas finas e poluentes nos escoamentos com superfície livre (SAYRE e CHANG, 1968; WILSON-JR, 1987; GUIMARÃES e WILSON-JR, 2004, 2005; GUIMARÃES, 2006; GUIMARÃES e WILSON-JR, 2007, 2008, 2014).

2.2 EXPERIÊNCIAS DE SAYRE E CHANG (1968)

Essas experiências foram realizadas no laboratório de hidráulica da Universidade Estadual do Colorado, em Fort Collins (USA), num canal prismático de seções retangulares, de 46,0 m de comprimento por 2,40 m de largura por 0,61 m de profundidade. A rugosidade do leito foi simulada artificialmente por meio de pequenos pedaços de madeira de dimensões 7,62x1,91x1,59 cm, uniformemente distribuídos no leito do canal. As características hidráulicas e sedimentológicas dessas experiências estão apresentadas no Quadro 1.

Foram estudados três tipos diferentes de dispersantes: (i) traçadores fluorescente (rodamina B e sulfurodamina B); (ii) partículas de sedimentos em suspensão (silte natural e contas de vidro); e, (iii) partículas flutuantes de polietileno, injetados instantânea e uniformemente distribuídos através da seção transversal. De acordo com Monteiro (2004), numa experiência com injeção ou imersão instantânea a massa de traçador é introduzida no escoamento num intervalo de tempo de duração desprezível em relação ao tempo médio de deslocamento das partículas fluidas. Todas as partículas injetadas são submetidas simultaneamente à ação do escoamento.

Como exemplo de injeção instantânea na natureza pode-se citar acidentes ambientais, como o derramamento de derivados de petróleo (gasolina e óleos), cujo tempo de duração do acidente seja tão curto que possa ser desprezível em relação ao tempo de deslocamento da pluma de contaminação. Esses acidentes são comuns no transporte de cargas perigosas no meio fluvial e marinho.

Quadro 1: Condições hidráulicas e sedimentológicas das experiências de Sayre e Chang (1968) com traçadores fluorescentes

Grandeza Símbolo	Unidade	Valores Experimentais	Descrição da Grandeza
B	m	2,40	Largura do canal
h	m	0,15	Tirante ou altura da coluna de água
L	m	46,00	Comprimento do canal
U	m	0,228	Velocidade média do escoamento
Q	l/s	82	Vazão líquida média do escoamento
$S_o \# S_f$	-	0,0001	Declividades longitudinais do leito e da superfície livre para o escoamento uniforme
θ	°C	20	Temperatura da água
u^*	cm/s	3,84	Velocidade média de atrito junto ao leito
τ_o	N/m ²	1,47	Tensão tangencial média do escoamento junto ao leito
v	m ² /s	1,00 x 10 ⁻⁶	Viscosidade cinemática da água
R_E	-	35000	Número de Reynolds do escoamento
F_R	-	0,19	Número de Froude do escoamento
C/\sqrt{g}	-	6,0	Fator de resistência, sendo c o coeficiente de resistência de Chèzy
K	m	0,013	Rugosidade do leito, considerada igual ao diâmetro médio do material do leito
Observações:			
1) Injeção instantânea uniformemente distribuída na seção transversal do canal;			
2) Leito artificialmente rugoso.			

Fonte: GUIMARÃES e WILSON-JR (2004, 2005); GUIMARÃES (2006).

A taxa de injeção, em função do tempo, é representada gráfica e analiticamente pela Função Delta de Dirac, também conhecida como função impulso unitário, conforme mostrado na Figura 1 e na Equação (21).

Figura 1: Representação de uma injeção instantânea

Taxa de imersão, $\alpha(t)$



Fonte: MONTEIRO (2004).

A taxa de imersão é igual à massa total injetada de traçador, M , durante um intervalo de tempo muito pequeno, $\square t$, sendo representada pela expressão,

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{M}{\Delta t} \right) \quad (21)$$

A Função Delta de Dirac permite representar grandezas cuja ação ocorra de forma instantânea e concentrada, como definido pela Equação (22),

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_i) dt = 1 \\ \delta(t - t_i) = 0; \quad t \neq t_i \end{cases} \quad (22)$$

Essa função é bastante útil nos estudos das experiências com traçadores pois, assim como as funções de grau unitário e exponencial, entre outras, pode ser utilizada para representar funções contínuas, permitindo-se trabalhar com imersões contínuas.

Algumas grandezas apresentadas no Quadro 1 são calculadas pelas expressões a seguir.

- **Velocidade média de atrito junto ao leito**

$$u_* = \sqrt{g R_H S_f} \quad (23)$$

sendo que u_* representa a velocidade média de atrito junto ao leito; g a aceleração da gravidade; R_H o raio hidráulico; e S_f a declividade longitudinal da superfície livre.

- **Tensão tangencial no leito**

$$\tau_o = \rho u_*^2 \quad (24)$$

em que τ_o representa a tensão tangencial no leito; e ρ é a densidade da água.

- **Número de Reynolds do escoamento**

$$R_E = \frac{U R_H}{\nu} \quad (25)$$

sendo que R_E representa o número de Reynolds; U é a velocidade média do escoamento; e ν é a viscosidade cinemática da água.

- **Número de Froude do escoamento**

$$F_R = \sqrt{\frac{U^2}{g R_H}} \quad (26)$$

em que F_R representa o número de Froude.

- **Fator de Resistência**

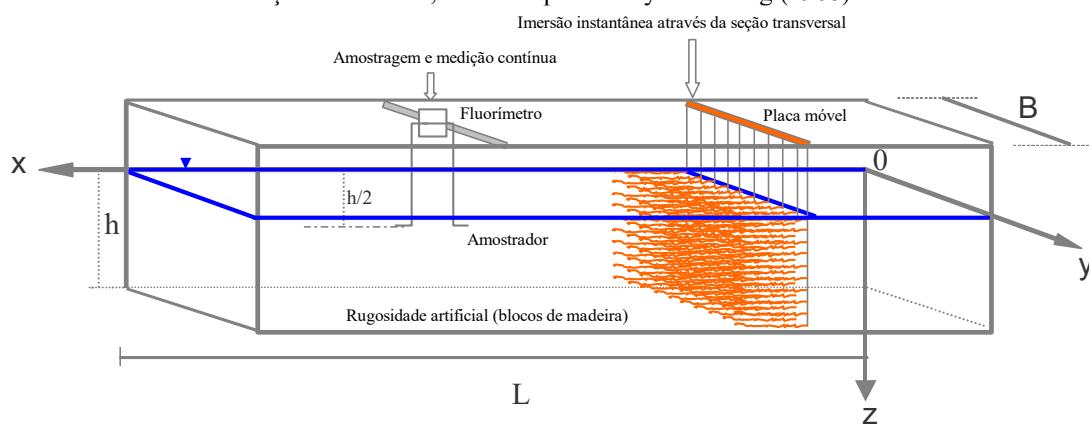
$$\frac{C}{\sqrt{g}} = \frac{U}{u_*} \quad (27)$$

onde C representa o coeficiente de resistência de Chèzy.

Considera-se neste artigo um dos estudos realizados por Sayre e Chang (1968), sobre a dispersão longitudinal de traçador fluorescente. Um dispositivo foi elaborado para a injeção instantânea de uma solução de corante uniformemente distribuída através da seção transversal, como

esquematizado na Figura 2. Cada experiência desse estudo consistiu na injeção de uma mesma quantidade de traçador e do registro contínuo com fluorímetro Turner Modelo 111, do tempo de passagem da nuvem através de uma seção transversal a jusante, pois só se dispunha de um único sistema de amostragem contínua. As amostragens foram realizadas no eixo do canal, a $0,50\text{ h}$, sendo h o tirante de água. O traçador fluorescente foi introduzido no canal a partir de uma canaleta elevada, transversal e ligeiramente acima do nível d'água, de modo que a distribuição inicial do corante se aproximasse duma fonte plana instantânea, com o dispersante uniformemente distribuído através da seção transversal do escoamento, isto é, $\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial z} = 0$.

Figura 2: Sistema esquemático de imersão, amostragem e medição do tempo de passagem do traçador através de uma seção transversal, utilizado por Sayre e Chang (1968)



Fonte: GUIMARÃES (2006); GUIMARÃES e WILSON-JR (2004, 2005, 2007, 2008, 2014).

2.3 EQUAÇÕES ANALÍTICAS PARA O ESTUDO DE SAYRE E CHANG (1968)

Sayre e Chang (1968) aplicaram a Teoria da Difusão Fickiana na análise dos resultados de suas experiências, considerando o coeficiente de dispersão e a velocidade média constantes em toda a seção transversal do escoamento. Como se trata de uma aplicação de traçadores líquidos fluorescentes, e de sedimentos extremamente finos, todas as partículas são transportadas em suspensão, não havendo retenção das partículas que tocam o fundo do canal. Nas condições dessas experiências a concentração C_m dependerá somente de x e t . Dessa forma, têm-se,

$$[\bar{\Phi}_z]_{z=h} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} + U \frac{\partial C_m}{\partial x} = D_{px} \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} \quad (29)$$

As soluções analíticas Lagrangeana e Euleriana da Equação (29), apresentadas a seguir, estão de acordo com a condição inicial de injeção do traçador adotada por Sayre e Chang (1968),

• **Solução Lagrangeana**

$$C_m(0, 0) = \frac{M}{B h} \quad (30)$$

$$C_m(x, t) = \frac{M}{B h} f_t(x) \quad (31)$$

$$f_t(x) = \frac{1}{2 \sqrt{\pi D_{px} t}} \exp \left[\frac{-(x - U t)^2}{4 D_{px} t} \right] \quad (32)$$

sendo que $f_t(x)$ é a função densidade de probabilidade da posição das partículas no instante t , ou seja, a função densidade de probabilidade de que as partículas se encontrem no intervalo $[x,$

$x + \Delta x]$ no instante t . Nessas equações tem-se: $[C_m(x, t)] \equiv M L^{-3}$ e $[f_t(x)] \equiv L^{-1}$.

• **Solução Euleriana**

A condição inicial é a mesma dada pela Equação (30), e as outras equações são as seguintes,

$$C_m(t, x) = \frac{M}{B h} \frac{1}{U} q_x(t) \quad (33)$$

$$q_x(t) = U f_t(x) = \frac{U}{2 \sqrt{\pi D_{px} t}} \exp \left[\frac{-(x - U t)^2}{4 D_{px} t} \right] \quad (34)$$

Neste caso, $q_x(t)$ é a função densidade de probabilidade do tempo de passagem das partículas por uma seção situada à distância x da seção de injeção, ou seja, é a função densidade de probabilidade de que as partículas percorram a distância x no intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$. Nessas expressões tem-se: $[C_m(t, x)] \equiv M L^{-3}$ e $[q_x(t)] \equiv T^{-1}$.

Das Equações (31) e (32), ou das Equações (33) e (34), obtém-se,

$$C_m(x, t) = C_m(t, x) = \frac{M}{2 B h \sqrt{\pi D_{px} t}} \exp \left[\frac{-(x - U t)^2}{4 D_{px} t} \right] \quad (35)$$

A Equação (35) é a solução analítica do movimento unidimensional de uma suspensão de sedimentos pelíticos injetados instantânea e uniformemente numa seção transversal do escoamento. Além dessa condição inicial, foram admitidas as seguintes hipóteses simplificadoras: (i) a velocidade e o coeficiente de dispersão longitudinal médio do dispersante são constantes; (ii) o dispersante e a mistura (dispersante–fluido vetor) possuem as mesmas propriedades físicas, incluindo as mesmas densidade e velocidade média de transporte, U .

A Equação (35) tem sido utilizada por inúmeros autores, com modificações impostas pelas condições iniciais, de contorno e pelas características físico-químicas do dispersante. Dentre esses autores destacam-se: Sayre e Chang (1968); Liu (1977); Wilson-JR. (1987); Islam e Chaudhry (1997); Wang e Lacroix (1997); Zoppou e Knight (1997); Rutherford (1999); Deng *et al.* (2002); Singh e Beck (2003); Guimarães e Wilson-JR (2004, 2005); Guimarães (2006); Baek, Seo e Jeong (2006); Carr e Rehmann (2007); Ani *et al.* (2009); Piotrowski *et al.* (2011); Chin (2013); Zeng e Huai (2014); Baek (2018); Shin, Seo e Seo (2020); Nwidadah e Adeloye (2020); Wang *et al.* (2022), entre outros.

2.4 PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE TEMPORAL, $q_X(T)$

Uma variável aleatória é caracterizada por sua função de repartição, a qual indica quais valores e com que probabilidade essa variável assume esses valores. Dentre as propriedades estatísticas que caracterizam a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória, destacam-se seus momentos, sua variância e sua moda.

O tempo de passagem das partículas através de uma seção transversal do escoamento caracteriza um processo aleatório cuja função densidade de probabilidade é dada pela Equação (34), que pode ser estudada a partir dessa equação, de seus momentos, variância e moda. Assim, os momentos de ordem m da função densidade de probabilidade, $q_x(t)$, são obtidos por meio da expressão geral,

$$E\{q_x^m(t)\} = \int_{t=0}^{t=\infty} t'^m q_x(t') dt' \cong \sum_{t=0}^{\infty} t^m q_x(t) \Delta t \quad (36)$$

• Balanço de Massa ou Equação Fundamental

A lei de conservação de massa requer que a quantidade total de material injetado no sistema seja mantida no interior do escoamento do rio ou canal. Para verificar essa hipótese pode-se utilizar o

momento de ordem zero da função densidade de probabilidade temporal. Como todo o material injetado passará pela seção transversal de medições, no intervalo de tempo $[0, \infty]$, tem-se,

$$E\{q_x^0(t)\} = \int_{t=0}^{t=\infty} q_x(t') dt' \cong \sum_{t=0}^{\infty} q_x(t) \Delta t = 1 \quad (37)$$

• Momento de Primeira Ordem ou Esperança Matemática

Neste caso, o momento de primeira ordem ou a esperança matemática corresponde ao tempo médio de passagem das partículas através duma seção situada à distância x da seção de imersão,

$$E\{q_x^1(t)\} = \int_{t=0}^{t=\infty} t' q_x(t') dt' \cong \sum_{t=0}^{\infty} t q_x(t) \Delta t \quad (38)$$

Combinando as Equações (34) e (38), Yotsukura (1963) *apud* Sayre; Chang (1968) obteve, através de métodos numéricos, a seguinte expressão para o tempo médio de passagem das partículas,

$$\bar{t} = E\{q_x(t)\} = \frac{1}{U} \left(x + \frac{2 D_{px}}{U} \right) \quad (39)$$

• Momento de Segunda Ordem e Variância

O momento de segunda ordem é dado pela seguinte expressão,

$$E\{q_x^2(t)\} = \int_{t=0}^{\infty} t'^2 q_x(t') dt' \cong \sum_{t=0}^{\infty} t^2 q_x(t) \Delta t \quad (40)$$

A variância é igual à esperança matemática do desvio quadrático do tempo gasto por uma partícula para percorrer a distância entre as seções de imersão e de medidas, em relação ao tempo médio de passagem do grupo de partículas. Dessa forma, a variância do tempo de passagem das partículas através da seção de medidas é dada por,

$$Var(t) = \int_{t=0}^{t=\infty} (t' - \bar{t})^2 q_x(t') dt' \cong \sum_{t=0}^{\infty} (t - \bar{t})^2 q_x(t) \Delta t = E\{q_x^2(t)\} - \bar{t}^2 \quad (41)$$

Ainda numericamente, Yotsukura (1963) *apud* Sayre; Chang (1968) obteve a seguinte expressão para a variância,

$$Var\{t\} = \frac{1}{U} \left[\frac{2x D_{px}}{U^2} + 8 \frac{(D_{px})^2}{U^3} \right] \quad (42)$$

- **Coeficiente de Variação**

O coeficiente de variação é definido pela relação,

$$C_V = \frac{\sqrt{Var\{t\}}}{E\{t\}} \quad (43)$$

De acordo com as Expressões (39) e (42) de Yotsukura (1963), tem-se,

$$C_V = \frac{\sqrt{2D_x(U_x + 4D_{px})}}{U_x + 2D_{px}} \quad (44)$$

- **Moda e Concentração Máxima**

A moda da função densidade de probabilidade temporal é o tempo correspondente à passagem do valor máximo de concentração através da seção de medidas, situada a uma distância x do ponto de imersão. Ela é definida por,

$$\{t_m\} = \left\{ t_m; \frac{\partial q_x(t)}{\partial t} = 0 \right\} \quad (45)$$

onde $\{t_m\}$ representa a moda da repartição temporal.

Para a determinação do valor máximo de $q_x(t)$ considerar-se-á que a origem do sistema de referências está se movimentando com a velocidade média do escoamento e situado na posição média do grupo de partículas. Isso equivale à seguinte transformação de coordenada longitudinal,

$$X = x - U t \quad (46)$$

Fazendo-se também,

$$A = \frac{U}{\sqrt{4 \pi D_x}} \quad (47)$$

a Equação (34) pode ser escrita do modo seguinte,

$$q_x(t) = A \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-X^2}{4 D_{px} t}\right) \quad (48)$$

onde se tem,

$$[q_x(t)]_{máx} = \frac{A}{\sqrt{t}} = \frac{U}{\sqrt{4 \pi D_{px} t}} = [q_x(t)]_{máx} \quad (49)$$

e,

$$q_x(t) = [q_x(t)]_{máx} \exp\left[\frac{-(x-U t)^2}{4 D_{px} t}\right] \quad (50)$$

Comparando-se as Equações (49) e (50) pode-se dizer que o valor máximo de $q_x(t)$ será obtido quando,

$$\exp\left[-\frac{(x-U t_{máx})^2}{4 D_{px} t_{máx}}\right] = 1 \quad (51)$$

ou seja, quando,

$$x - U t_{máx} = 0 \quad (52)$$

e,

$$t_{máx} = \frac{x}{U} \quad (53)$$

A concentração máxima, obtida da Equação (35), é igual a,

$$\left\{ C_m(t, x) \right\}_{máx} = \frac{M}{B h \sqrt{4 \pi D_{px} t_{máx}}} \quad (54)$$

3 RESULTADOS

3.1 DETERMINAÇÃO DA VELOCIDADE MÉDIA DE TRANSPORTE

Os tempos de passagem da média do grupo de partículas pelas seções de medidas, distantes 10, 20, 27 e 35 m da seção de imersão, estão apresentados no Quadro 2, juntamente com as velocidades médias de trânsito das partículas, de cada experiência. Para a seção distante 35 m da seção de imersão foram realizadas duas experiências separadas, e levantadas duas curvas de passagem; experiências 35 e 35(A).

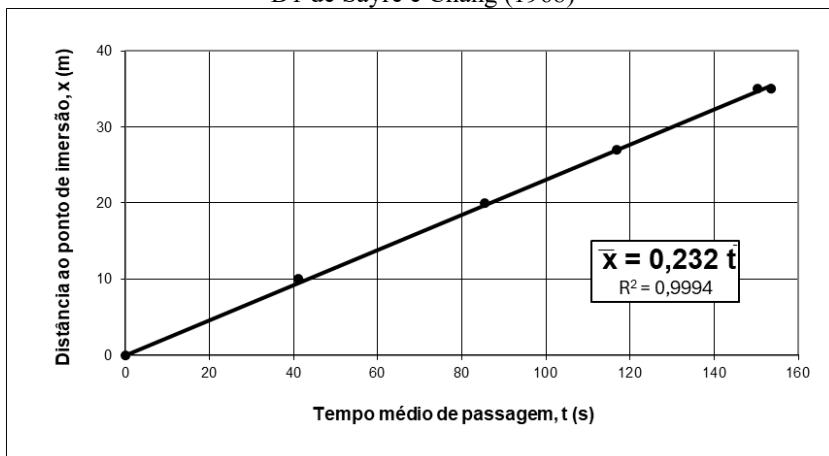
Quadro 2: Tempos e velocidades médias de trânsito das partículas de corante nos ensaios de Sayre e Chang (1968)

Experiências	Distância à seção de imersão, x (m)	Tempo médio de passagem, t (s)	Velocidade média das partículas, (m/s)
LO-D1-10	10	41,1	0,242
LO-D1-20	20	85,5	0,235
LO-D1-27	27	116,9	0,230
LO-D1-35	35	153,6	0,228
LO-D1-35(A)	35	150,4	0,232

Fonte: GUIMARÃES e WILSON-JR (2005); GUIMARÃES (2006).

Na Figura 3 apresenta-se o gráfico das distâncias percorridas pelas partículas, da seção de injeção às de detecção, em função do tempo médio de passagem do grupo de partículas. A velocidade média das partículas, para o conjunto de experiências, é dada pelo coeficiente angular da reta, ajustada pelo método dos mínimos quadrados que, obrigatoriamente passa pela origem.

Figura 3: Distâncias percorridas pelas partículas em função do tempo médio de passagem do corante. Experiências LO-D1 de Sayre e Chang (1968)



Fonte: GUIMARÃES e WILSON-JR (2005); GUIMARÃES (2006).

É interessante observar que o valor medido da velocidade média das partículas de corante, assim obtido, $\bar{u}_{px} = 0,232$ m/s, é superior à velocidade média do fluido, $U = 0,228$ m/s. Isso significa que, provavelmente, a injeção do traçador não foi distribuída instantânea e uniformemente através da seção transversal, como idealizado. Na realidade, a constatação visual realizada por Sayre e Chang (1968) em seus ensaios não é suficiente para comprovar a uniformidade do traçador através da seção transversal de injeção. Amostragens através dessa seção, ou nas seções próximas a jusante, teriam sido mais conclusivas. Provavelmente, valores mais elevados de concentrações do corante existiam na metade superior da seção de injeção. Nessa região o corante é submetido a velocidades mais intensas do fluido do que na parte inferior da seção e, consequentemente, submetido, também, a valores mais elevados de velocidade do que a da velocidade debitante, U .

Do Quadro 2 (precedente), constata-se que somente nas experiências LO-D1-27 e -35, para as distâncias de 27 e 35 m, as velocidades médias do traçador foram aproximadamente iguais à velocidade do fluido. Isso significa que somente para essas seções a distância de bom misturamento do traçador foi alcançada, e, somente para esses casos, o transporte e a dispersão do traçador não foram influenciados pelas condições de imersão.

3.2 COEFICIENTE DE DISPERSÃO

Para a análise dos dados experimentais foi concebido um programa em linguagem Fortran, denominado AJUSTDP (AJUSTe do coeficiente de DisPersão), o qual seleciona o valor de D_{px} tal que a soma dos desvios quadráticos entre os valores teóricos e experimentais das funções densidade ou de distribuição de probabilidade do tempo de trânsito das partículas seja mínima. Primeiramente, o programa normaliza as curvas de concentração, ou curvas de funções densidade de probabilidade do

tempo de passagem do traçador em função do tempo, de modo que as curvas teóricas e experimentais das diversas seções de medidas possam ser comparadas entre si. O programa utiliza a seguinte expressão para essa normalização,

$$q_x(t) = \frac{C_m(t, x)}{\int_{t=0}^{t=\infty} C_m(t', x) dt'} \cong \frac{C_m(t, x)}{\sum_{i=0}^{i=\infty} C_m(t_i, x) \Delta t} \quad (55)$$

Em seguida o programa calcula as funções de distribuição de probabilidades experimental e teórica,

$$Q_x(t) = \int_{t=0}^{t=\infty} q_x(t) dt \cong \sum_{i=0}^{i=N} q_x(t_i) \Delta t \quad (56)$$

sendo, N o número de divisões do intervalo $[0, t]$ e,

$$t = N \Delta t \quad (57)$$

Levando-se em conta a Equação (55), a Equação (56) torna-se,

$$Q_x(t) = \frac{\int_{t=0}^{t=t} C_m(t', x) dt'}{\int_{t=0}^{t=\infty} C_m(t', x) dt'} \cong \frac{\sum_{i=0}^{i=N} C_m(t_i, x) \Delta t}{\sum_{i=0}^{i=\infty} C_m(t_i, x) \Delta t} \quad (58)$$

Utilizando-se um acento circunflexo para indicar os valores experimentais, são calculados os valores das seguintes funções objetivos, z e Z, para diferentes valores do coeficiente de dispersão longitudinal,

i. Para as funções densidade de probabilidade

$$z = \sum_{i=1}^N \left[q_x(t_i) - \hat{q}_x(t_i) \right]^2 \quad (59)$$

ii. Para as funções de distribuição de probabilidade

$$Z = \sum_{i=1}^N \left[Q_x(t_i) - \hat{Q}_x(t_i) \right]^2 \quad (60)$$

Tendo em vista as condições experimentais e os resultados apresentados no item anterior, foram realizados três tipos de ajustes das funções densidade de probabilidades teóricas, os quais consideram:

- 1º) a velocidade média do traçador igual à velocidade média do fluido, ou seja, $\bar{u}_{px} = U$, e um único valor do coeficiente de dispersão, D_{px} ;
- 2º) a velocidade média do traçador igual à velocidade média do fluido, $\bar{u}_{px} = U$, mas com valores do coeficiente de dispersão determinados para cada seção de medidas, ou para cada experiência, separadamente; e
- 3º) os valores da velocidade média de trânsito das partículas e do coeficiente de dispersão determinados para cada experiência isolada.

Os valores das funções objetivo e os respectivos coeficientes de dispersão em função da velocidade média do escoamento, calibrados através do Programa AJUSTDP, na simulação em que a velocidade do traçador foi igual à velocidade média do fluido e se calculou um único coeficiente de dispersão para todas as experiências – 1º ajuste, são apresentados no Quadro 3.

Quadro 3: Coeficiente de dispersão considerando o conjunto das experiências LO-D1 de Sayre e Chang (1968)

Velocidade média do escoamento, (m/s)	Função objetivo, z	Coeficiente de dispersão, D_{px} (m^2/s)
0,228	0,005905	0,0343

Fonte: GUIMARÃES e WILSON-JR (2005); GUIMARÃES (2006).

O Quadro 4 apresenta os resultados do 2º ajuste, no qual considera a velocidade média do traçador igual à velocidade média do fluido, e se calculou um coeficiente de dispersão para cada experiência isolada. Constam nesse quadro os valores dos coeficientes de dispersão e das funções objetivo, em função da velocidade média do escoamento, calibrados utilizando-se o modelo AJUSTDP. Observam-se nesse quadro melhores ajustes em relação ao anterior, tendo em vista os valores das funções objetivo.

Quadro 4: Coeficiente de dispersão de cada experiência LO-D1 de Sayre e Chang (1968), considerando a velocidade média das partículas iguais à velocidade do escoamento

Distância ao ponto de imersão, x (m)	Função objetivo, z	Coeficiente de dispersão, D_{px} (m^2/s)
10	0,002930	0,0463

20	0,001164	0,0364
27	0,000437	0,0278
35	0,000062	0,0289
35 [35(A)]	0,000758	0,0275

Fonte: GUIMARÃES e WILSON-JR (2005); GUIMARÃES (2006).

No Quadro 5 são apresentados os resultados do 3º ajuste, no qual foram consideradas as velocidades médias de trânsito das partículas e os coeficientes de dispersão para cada experiência isolada. Os valores das funções objetivo mostram que essa calibração produziu resultados ainda melhores do que os dois ajustes anteriores.

Quadro 5: Determinação do coeficiente de dispersão para cada experiência LO-D1 de Sayre e Chang (1968)

Distância ao ponto de imersão, x (m)	Velocidade média das partículas \bar{u}_{px} (m/s)	Função objetivo, z	Coeficiente de dispersão D_{px} (m^2/s)
10	0,242	0,000649	0,0387
20	0,235	0,000199	0,0327
27	0,230	0,000195	0,0272
35	0,228	0,000062	0,0289
35 [35(A)]	0,232	0,000146	0,0247

Fonte: GUIMARÃES e WILSON-JR (2005); GUIMARÃES (2006).

3.3 FUNÇÕES DENSIDADE E DE DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

Utilizando-se o Programa CDI-1D-N e os resultados obtidos no 3º ajuste teórico obteve-se o coeficiente de dispersão que melhor ajustava as curvas numéricas e experimentais. Os valores das funções objetivo mostram que essa calibração produziu bons resultados (Quadro 6).

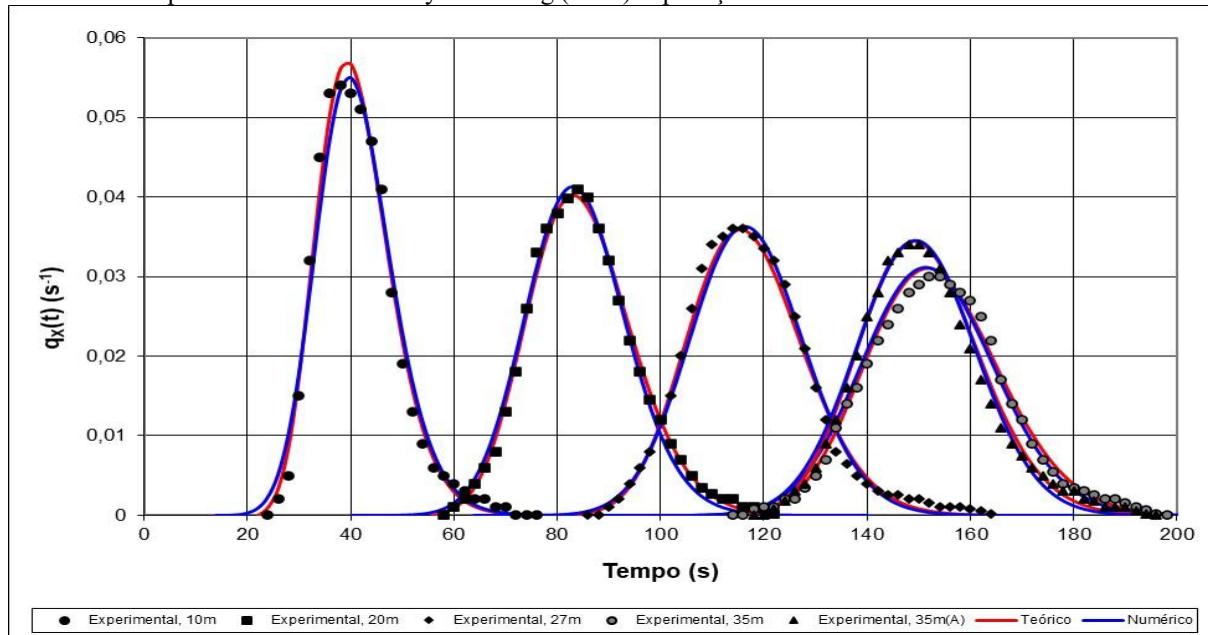
Quadro 6: Coeficiente de dispersão determinado numericamente por experiência LO-D1 de Sayre e Chang (1968)

Distância ao ponto de imersão, x (m)	Fator de ponderação espacial, ω	Velocidade média das partículas \bar{u}_{px} (m/s)	Função objetivo, χ	Coeficiente de dispersão k_{px} (m^2/s)
10	0,65	0,242	0,000093	0,040000
20	0,65	0,235	0,000032	0,032700
27	0,65	0,228	0,000034	0,027800
35	0,65	0,228	0,000036	0,028800
35(A)	0,65	0,230	0,000029	0,024500

Fonte: GUIMARÃES e WILSON-JR (2005); GUIMARÃES (2006).

A Figura 4 apresenta as curvas de passagem do dispersante pelas seções de medidas. Verifica-se que os modelos teórico e numérico reproduziram, com boa precisão, as funções densidade de probabilidade do movimento do traçador fluorescente em suspensão das experiências LO-D1 de Sayre e Chang (1968), quando se consideraram os valores das velocidades médias de trânsito das partículas e dos coeficientes de dispersão para cada experiência, separadamente.

Figura 4: Funções densidade de probabilidade do tempo de passagem do traçador fluorescente pelas seções de medidas das experiências LO-D1 de Sayre e Chang (1968). Aplicações dos Modelos Teórico e Numérico

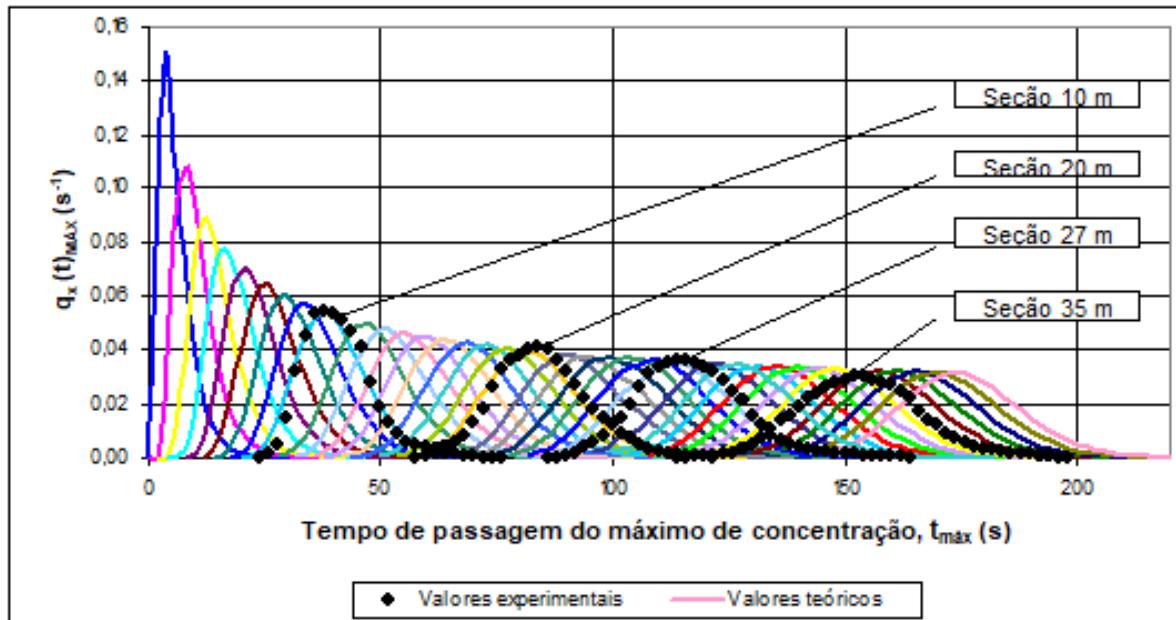


Fonte: GUIMARÃES e WILSON-JR (2005); GUIMARÃES (2006).

Verifica-se que o modelo teórico fez uma excelente descrição das funções densidade e das funções de distribuições de probabilidades do movimento de corante em suspensão, considerando-se os valores das velocidades médias de trânsito das partículas e dos coeficientes de dispersão para cada experiência isolada, conforme aplicado no 3º ajuste. Dessa forma, o modelo teórico mostrou-se capaz de prever, com precisão, o tempo de passagem da nuvem de corantes através das seções transversais do canal, podendo ser utilizado no estudo da contaminação de cursos d'água naturais.

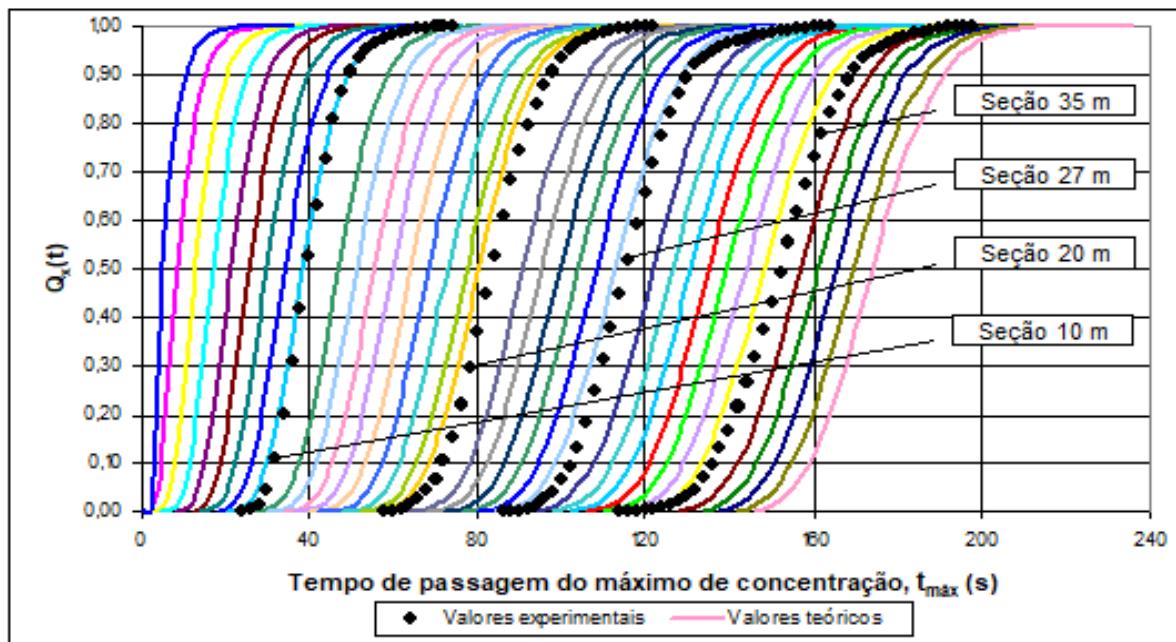
Considerando-se a equação que explicita o coeficiente de dispersão em função da raiz quadrada da moda, e as velocidades médias das partículas (Quadro 5), foram calculadas as funções densidade e de distribuição de probabilidades do tempo de passagem do corante por seções situadas desde a imersão até o final do canal, as quais estão apresentadas nas Figuras 5 e 6.

Figura 5: Funções densidade de probabilidades estimadas para as experiências LO-D1 de Sayre e Chang (1968)



Fonte: autoria própria (2025).

Figura 6: Funções de distribuições de probabilidade estimadas para as experiências LO-D1 de Sayre e Chang (1968)



Fonte: autoria própria (2025).

Observa-se na Figura 5 a atenuação dos valores máximos das funções densidade de probabilidades, à medida que a massa de corante injetada vai sendo transportada e dispersa ao longo do canal e no tempo. Na Figura 6, verifica-se que o tempo de passagem da massa total do traçador através das ecoes transversais aumenta com a distância à seção de imersão, fazendo com que as curvas

das funções de distribuição se tornem menos íngremes com a distância, mostrando, também, um período cada vez maior entre o início e final da passagem do corante.

4 CONCLUSÕES

Um requisito indispensável na descrição dos mecanismos que regem o movimento de contaminantes nos escoamentos com superfície livre é o estabelecimento da taxa de transferência e a descrição da forma de diluição desses poluentes através do escoamento. Para isso é necessário um cálculo criterioso do coeficiente de dispersão longitudinal, o qual é um parâmetro fundamental na modelagem hidráulica, como apresentado neste artigo.

Numerosos pesquisadores contribuíram para o entendimento dos mecanismos de transporte e dispersão longitudinal, destacando-se o trabalho pioneiro de Taylor (1954), no estudo da dispersão de contaminantes em escoamento laminar num tubo circular. Esse autor afirmou que embora o mecanismo primário que comanda a dispersão em escoamento turbulento seja a variação da velocidade através da seção transversal, o processo de dispersão pode ser descrito pela equação unidimensional de difusão Fickiana. Posteriormente, Fischer (1967) mostrou que essa hipótese é válida somente para um período de tempo muito posterior à injeção do traçador. Segundo Fischer (1967), as hipóteses de Taylor têm sido amplamente aceitas, mesmo para o estudo de escoamentos naturais e estuários, para os quais não foram desenvolvidas. Fischer propõe a verificação e/ou validação dessas hipóteses por meio de análises de estudos experimentais, como apresentado.

REFERÊNCIAS

- ANI, E-C.; WALLIS, S.G.; KRASLAWSKI, A.; AGACHI, P.S. (2009). Development, calibration and evaluation of two mathematical models for pollutant transport in a small river. *Environmental Modelling & Software*, V.24(10), pg.1139-1152, <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2009.03.008>.
- BAEK, K.O. (2018). Flowchart on choosing optimal method of observing transverse dispersion coefficient for solute transport in open channel flow. *Sustainability* 2018, 10(5), pg.1332; <https://doi.org/10.3390/su10051332>.
- BAEK, K.O.; SEO, I.W.; JEONG, S.J. (2006). Evaluation of dispersion coefficients in meandering channels from transient tracer tests. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, V.132(10), pg. 1021–1032, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2006\)132:10\(1021\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2006)132:10(1021)).
- CARR, M.L; REHMANN, C.R. (2007). Measuring the dispersion coefficient with acoustic Doppler current profilers. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, V.133(8), pg. 977-982. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2007\)133:8\(977\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2007)133:8(977)).
- CHIN, D.A. (2013). *Water-Quality Engineering in Natural Systems*: Fate and transport processes in the water environment, 2nd published. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA.
- CHATWIN, P.C.; ALLEN, C.M. (1985). Mathematical models of dispersion in Rivers and Estuaries, *Annual Review of Fluid Mechanics*, v.17 (1) 119–149, <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.17.010185.001003>.
- CHAUDHRY, M.H.; CASS, D.E.; EDINGER, J.E. (1983). Modelling of unsteady-flow water temperatures, *Journal of Hydraulic Engineering*. V.109(5), pg. 657–669, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1983\)109:5\(657\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1983)109:5(657)).
- DENG, Z-Q; BENGTSSON, L.; SINGH, V.P.; ADRIAN, D.D. (2002). Longitudinal dispersion coefficient in single-channel streams. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, V.128(10), pg. 901-916, DOI:10.1061/(ASCE)0733-9429(2002)128:10(901).
- FORTIER, A. (1975). *Mécanique des fluides et transferts de chaleur et de masse par convection*. Masson et Cie, Éditeurs. Paris.
- GANE, C.R.; STEPHENSON, P.L. (1979). An explicit numerical method for solving transient combined heat conduction and convection problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. V. 14 (8) pg. 1141–1163, <https://doi.org/10.1002/nme.1620140804>.
- GUIMARÃES, M.M. (2006). *Estudo do movimento de partículas de sedimentos finos nos escoamentos com superfície livre com transferências verticais*. Tese de Doutorado em Ciências em Engenharia Civil/Recursos Hídricos. Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós Graduação e Pesquisa de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, 436 p.il.
- GUIMARÃES, M.M.; WILSON-JR., G. (2004). *Modelo unidimensional para o estudo do movimento de partículas de sedimentos em suspensão nos escoamentos com superfície livre*. In: 6º Encontro Nacional de Engenharia de Sedimentos, CES/ABRH. Vitória-ES: 08 a 10/dezembro/2004.

GUIMARÃES, M.M.; WILSON-JR., G. (2005). *Movimentos unidimensionais duma suspensão de sedimentos pelíticos em escoamentos com superfície livre*. In: XVI Simpósio Brasileiro de Recursos, João Pessoa-PB: 20 a 24/novembro/2005, ABRH.

GUIMARÃES, M.M.; WILSON-JR., G. (2007). *Estudos unidimensionais do movimento de partículas de sedimentos finos nos escoamentos com superfície livre*. In: XVII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos e VIII Simpósio de Hidráulica e Recursos Hídricos dos Países de Língua Oficial Portugues. São Paulo/SP. ABRH - Associação Brasileira de Recursos Hídricos.

GUIMARÃES, M.M.; WILSON-JR., G. (2008). *Estudios bi-dimensionales del movimiento de las partículas de sedimentos finos en escurrimientos con superficie libre*. In: XXIII Congreso Latino Americano de Hidráulica, 2008, Cartagena de Índias. Memorias del XXIII Congreso Latino Americano de Hidráulica. Cartagena de Índias: IAHR - International Association for Hydro-Environment Engineering and Research.

GUIMARÃES, M.M.; WILSON-JR., G. (2014). *Movimentos bidimensionais de partículas de sedimentos finos em suspensão nos escoamentos com superfície livre*. In: XI Encontro Nacional de Engenharia de Sedimentos. Disponível em: <https://anais.abrhidro.org.br/job.php?Job=11755>. Acesso em: Jun-2025.

ISENBERG, J.; GUTFINGER, C. (1973). Heat transfer to a draining film, *International Journal of Heat & Mass Transfer*, v.16 (2), pg. 505–512. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(73\)90075-6](https://doi.org/10.1016/0017-9310(73)90075-6).

ISLAM, M.R.; CHAUDHRY, M.H. (1997). Numerical solution of transport equation for applications in environmental hydraulics and hydrology. *Journal of Hydrology*. V.191(1-4), pp. 106-121, [https://doi.org/10.1016/S0022-1694\(96\)03077-6](https://doi.org/10.1016/S0022-1694(96)03077-6).

LAPIDUS, L.; AMUNDSON, N.R. (1952). Mathematics of Adsorption in Beds. VI. The Effect of Longitudinal Diffusion in Ion Exchange and Chromatographic Columns, *The Journal of Physical Chemistry*. V.56(8), pg. 984–988, <https://doi.org/10.1021/j150500a014>.

LIU, H. (1977). Predicting dispersion coefficient of streams. *Journal of the Environmental Engineering Division, ASCE*, V.103(1), 59-69, <https://doi.org/10.1061/JEEGAV.0000605>.

MONTEIRO, C.S.G. (2004). *Processos aleatórios com injeções instantânea e contínua, aplicadas ao movimento de sedimentos e poluentes em escoamentos com superfície livre*. Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós Graduação e Pesquisa de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE/UFRJ. *Tese de Mestrado em Ciências em Engenharia Civil*.

NWIDADAH, B.; ADELOYE, O. M. (2020). Curve fitting the hydrodynamic and dispersion characteristics of pollutant released in an inland water system. *Global Journal of Engineering and Technology Advances*, V.05(02), pg.038–046. <https://doi.org/10.30574/gjeta.2020.5.2.0098>.

PARLARGE, J.Y. (1980). Water transport in soils. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v.12 pg. 77–102, <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.12.010180.000453>.

PIOTROWSKI, A.P.; NAPIORKOWSKI, J.J.; ROWINSKI, P.M.; WALLIS, S.G. (2011). Evaluation of temporal concentration profiles for ungauged rivers following pollution incidents. *Hydrological Sciences Journal*, V.56(5), pg.883-894, <https://doi.org/10.1080/02626667.2011.583398>.

RUTHERFORD, J.C. (1999). *River mixing*. John Wiley & Sons Ltda. England. 347 p.

SALMON, J.R.; LIGGETT, J.A.; GALLAGHER, R.H. (1980). Dispersion analysis in homogeneous lakes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 15 (11) 1627–1642, <https://doi.org/10.1002/nme.1620151106>.

SAYRE, W.W.; CHANG, F.M. (1968). A laboratory investigation of open-channel dispersion processes for dissolved, suspended, and floating dispersants. *Transport of Radionuclides by Streams. Geological Survey Professional Paper 433-E*. Washington. 71 p.

SHIN, J.; SEO, J.Y.; SEO, I.W. (2020). Longitudinal dispersion coefficient- for mixing in open channel flows with submerged vegetation. *Ecological Engineering*. 2020, V.145. <https://doi.org/10.1016/j.ecoleng.2020.105721>

SINGH, S.K.; BECK, M.B. (2003). Dispersion coefficient of streams from tracer experiment data. *Journal of Environmental Engineering*, V.29(6), pg. 539-546. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9372\(2003\)129:6\(539\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9372(2003)129:6(539))

WANG, H.; CONG, P.; ZHU, Z.; ZHANG, W.; AI, Y.; HUAI, W. (2022). Analysis of environmental dispersion in wetland flows with floating vegetation islands. *Journal of hydrology*, V.606. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2021.127359>

WANG, H.Q.; LACROIX, M. (1997). Optimal weighting in the finite difference solution of the convection-dispersion equation. *Journal of Hydrology*, V. 200(1-4), pg. 228-242, [https://doi.org/10.1016/S0022-1694\(97\)00020-6](https://doi.org/10.1016/S0022-1694(97)00020-6).

WILSON-JR, G. (1987). *Etude du transport et de la dispersion des sédiments en tant que processus aléatoires*. Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences Physiques. Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 419p., Paris, France.

YOTSUKURA, N. (1963). *Turbulent dispersion of miscible materials in open channels*. In: U.S. Atomic Energy Comm., Transport of radionuclides in fresh water systems: U.S. Atomic Energy Comm. TID-7664, pp. 311-326.

ZENG, Y-H.; HUAI W.X. (2014). Estimation of longitudinal dispersion coefficient in rivers. *Journal of Hydro-environment Research*, V.8(1), pg.2-8. <https://doi.org/10.1016/j.jher.2013.02.005>.

ZOPPOU, C., KNIGHT, J.H. (1997). Analytical solutions for advection and advection-diffusion equations with spatially variable coefficients. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, V. 123(2), pg. 144-148. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9429(1997)123:2(144).