Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

UMA ABORDAGEM DO ESTUDO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA COM A UTILIZAÇÃO DA FORMA ALGÉBRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

https://doi.org/10.56238/arev6n2-006

Data de submissão: 01/09/2024 **Data de publicação:** 01/10/2024

José Maria dos Santos Lobato Júnior
Doutorando em Matemática pela Universidade Federal do Pará
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará – Campus Abaetetuba
E-mail: jose.lobato@ifpa.edu.br

Tonival de Sarges Corrêa
Doutorando em Matemática pela Universidade Federal do Pará
Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC-PA)
E-mail: sargestonival@gmail.com

José Francisco da Silva Costa
Doutor em Física pela Universidade Federal do Pará
Universidade Federal do Pará – Campus Abaetetuba
E-mail: jfc@ufpa.br

RESUMO
Este artigo tem como objetivo apresentar um novo método para o cálculo das raízes de uma função quadrática, também chamada de função polinomial do 2º grau, sem recorrer a fórmulas conhecidas na literatura em Matemática. Nesse sentido, utiliza-se o número complexo na forma algébrica $x=m+ni$. Aborda-se, na sessão de aplicações, alguns problemas, inclusive na área da Física, em que se faz a comparação do cálculo das raízes, considerando o desenvolvimento a partir de expressões conhecidas, e compara-se com o método apresentado neste trabalho com a finalidade de validar o que foi proposto. Verificou-se que o método, apresentado na forma de um teorema, não se tem a necessidade de aplicar as fórmulas conhecidas, pois o desenvolvimento matemático conduz a resolver apenas um sistema linear com duas variáveis m e n, por exemplo, em que m vai representar a abscissa do vértice da parábola da função dada e n pode ser escrito como uma expressão que envolve o discriminante Δ. Além disso, faz-se uma discussão da natureza das raízes da função quadrática a partir da análise do parâmetro n, o qual acusará se estas serão reais ou complexas. Concluiu-se que, considerando o número complexo na forma $x=m+ni$ o método apresentado é de simples aplicabilidade e de grande relevância.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Função quadrática. Número complexo. Cálculo de raízes.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

1 INTRODUÇÃO

O número complexo surgiu a partir da resolução de uma equação polinomial do 2º grau (BERRIMAN, 1956), quando se obteve valor negativo para o discriminante delta (Δ). No início não se tinha uma explicação lógica capaz de interpretar situações em que houvesse o cálculo de raiz quadrada onde o valor sob o radical fosse de sinal negativo, por isso a grande dificuldade em encontrar tais resultados. Historicamente, resolver equações sempre trouxe grande fascinação para um número significativo de matemáticos (FRAGOSO, 1999), principalmente os matemáticos antigos da Babilônia que no início conseguiram resolver algumas equações do 2º grau utilizando a ideia de completar quadrados. Os gregos, no entanto, passaram a desenvolver importante papel no formalismo da matemática onde resolveram alguns tipos de equações do 2º grau com régua e compasso (GARBI, 2010).

Os matemáticos hindus foram os que conseguiram avançar nas pesquisas em Álgebra, e, Bhaskara foi o matemático que desenvolveu estudo para o cálculo de raízes de uma função quadrática. É devido a ele que se consagrou a expressão "fórmula de Bhaskara", no entanto, vale ressaltar que a descoberta da referida fórmula é atribuída ao matemático hindu Sridhara (CARMO, MORGADO e WAGNER, 1992). Assim sendo, a fórmula de Bhaskara conduz que as raízes sejam:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{1}$$

Sendo o número $\Delta = b^2 - 4ac$ real é possível que venha ter um valor negativo, o que causou uma enorme perturbação para muitos matemáticos da época. A resposta para essa situação era a questão de não haver solução. Essa ideia de não solução permaneceu por muito tempo até que na Itália, no século XVI, a partir de uma disputa entre Cardano e Tartaglia pela resolução de uma equação do 3º grau que se pensou que os números reais não eram suficientes para responder o problema apresentado. Dessa maneira, sentiu-se a necessidade de introduzir na área da matemática um conjunto $\mathbb{C}$ que fosse "maior" que o conjunto dos números reais, abrindo caminhos para um desenvolvimento matemático em que coubesse uma melhor interpretação algébrica para solucionar esse tipo de problema (CARMO *et al.*, 1991).

Dos muitos matemáticos que passaram a tratar o tema, levando em conta o corpo complexo, Leonhard Euler foi quem mais trabalhou na produção e publicação. Dos diversos trabalhos desenvolvidos, seu empenho foi notável na melhoria da simbologia. Muitas das notações que se utiliza hoje foi introduzida por esse brilhante matemático. Dentre as representações propostas por Euler destaca-se o i substituindo por $\sqrt{-1}$. Euler passou a estudar números da forma $x = m + ni$ onde m e n são números reais, tal que $i^2 = -1$. Os elementos representados dessa forma são chamados de números complexos.

Atualmente, os números complexos podem ser utilizados em diferentes áreas científicas como na Física, na Matemática, na Engenharia e etc. (ÁVILA, 1996).

Neste artigo utiliza-se o número complexo com objetivo de calcular as raízes de uma equação polinomial de grau 2, sem recorrer à conhecida fórmula de Bhaskara. Para melhor desenvolver dessa pesquisa, abordou-se alguns pontos como pré-requisitos para melhor compreensão do tema e, em seguida, desenvolver o método de resolver uma equação polinomial do 2º grau utilizando o número $x = m + ni$ como forma de obter as raízes desta equação.

Para melhor interpretar e analisar a relevância do trabalho demonstrou-se um teorema que conduz aos valores dos parâmetros m e n que representam a parte real e a parte imaginária, respectivamente, do número complexo na forma algébrica: $x = m + ni$. Aplicou-se o teorema a alguns problemas matemáticos e físicos para consolidar e mostrar a veracidade e importância do teorema, utilizando, também, uma comparação entre os dois formalismos. Acredita-se que as aplicações são importantes alternativas para uma melhor compreensão e consolidação do referido tema.

A metodologia proposta na pesquisa concentrou-se no fato que qualquer equação quadrática, independentemente do valor delta ser positivo ou negativo, pode ser resolvida não pelo método usual (RIBEIRO, 2009), mas sim com base em dois parâmetros, m e n. Podemos, ainda, considerar a condição de que o valor numérico de n pode ser utilizado para discussão das raízes da equação quadrática do mesmo modo como é feito com o discriminante da equação do 2º grau (REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA nº 39, 1999).

Verificou-se no desenvolvimento dos problemas que a solução da equação acontece com a resolução de um sistema de duas equações lineares e duas incógnitas, oriundo da operação de igualdade entre números complexos, em que a solução não envolve o uso da fórmula de Bhaskara. Outra questão a ser observada é a razão de constatar que o número complexo, apesar de ter sido um grande impasse que influenciou e motivou inúmeros matemáticos para analisar e desenvolver solução para o caso em que o discriminante era negativo, pode ser utilizado para calcular raízes de qualquer equação polinomial do 2º grau, como será visto ao longo dessa abordagem.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A seguir apresenta-se uma breve abordagem sobre o estudo da função quadrática que pode ser encontrada em diversas literaturas em matemática.

2.1 DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA E FORMA CANÔNICA

Segundo Iezzi & Murakami (2013, p. 137) "Uma aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função quadrática ou do 2º grau quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$, o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, em que a, b e c são números reais dados e $a \neq 0$."

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0 \tag{2}$$

A partir da expressão (2) verifica-se que:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Longrightarrow \quad f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \tag{3}$$

introduzindo o termo $\frac{b^2}{4a^2}$ e seu simétrico, $f(x)$ não é alterada. Assim:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \tag{4}$$

$$f(x) = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right] \tag{5}$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)\right] \tag{6}$$

Considerando

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{7}$$

então,

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \tag{8}$$

A relação (7) é denominada discriminante da função polinomial do 2º grau e a expressão (8) é conhecida como forma canônica da função quadrática, sendo esta última, podendo ser utilizada para determinar as raízes dessa função e a coordenada do ponto de vértice.

2.2 RAÍZES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA E ESTUDO DO DISCRIMINANTE

Tomando-se $f(x) = 0$, então, a expressão dada por (8) se transforma na seguinte equação:

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0. \tag{9}$$

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Como $a \neq 0$, então:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2} \iff x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \tag{10}$$

ou, equivalentemente,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{11}$$

Portanto, os valores de x tais que $f(x)=0$ são dados por:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{12}$$

Em outras palavras, os valores de x_1 e x_2 tornam a função quadrática nula e, dessa forma, são denominados raízes ou zeros dessa função.

Segundo Giovanni Junior & Castrucci (2018, p. 101) a expressão (11) “é chamada fórmula resolutiva da equação completa do 2º grau”, que também é conhecida nos livros didáticos como a fórmula de Bhaskara.

Casos para o estudo do discriminante:

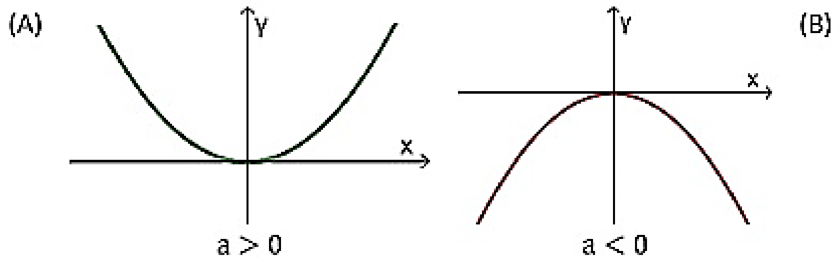
i. Se $\Delta = 0$ (discriminante nulo), a equação $f(x)=0$ apresentará duas raízes reais iguais, ou seja, $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$;
ii. Se $\Delta > 0$ (discriminante positivo), a equação $f(x)=0$ apresentará duas raízes reais diferentes, ou seja, $x_1 \neq x_2$;
iii. Se $\Delta < 0$ (discriminante negativo), a equação $f(x)=0$ não apresentará raízes reais, uma vez que $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$.

2.3 GRÁFICO, VÉRTICE, VALORES MÁXIMO E MÍNIMO E EIXO DE SIMETRIA

De acordo com (LIMA, 2013) “O gráfico de uma função quadrática é uma parábola”, que conforme seja $a > 0$ ou $a < 0$, a parábola tem sua concavidade voltada para cima ou para baixo, respectivamente. Ver Figura 1.

Figura 1. Gráfico de uma função quadrática: (A) concavidade voltada para cima; (B) concavidade voltada para baixo

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472



Fonte: Os autores (2023)

Agora, seja a expressão dada em (8), tem-se que:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}. \tag{13}$$

Se

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \Longrightarrow \quad f(x) = -\frac{\Delta}{4a}. \tag{14}$$

O ponto V de coordenadas

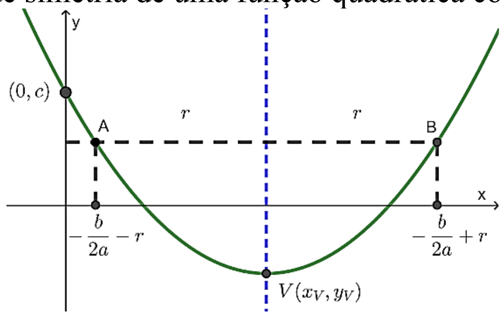
$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \tag{15}$$

é denominado vértice da função quadrática e representa o ponto extremo do gráfico de f. Portanto, verifica-se que a forma canônica pode ser utilizada para obtenção das raízes da função e para determinação das coordenadas do vértice.

Nota-se ainda que, se $a > 0$, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui valor mínimo $y = -\frac{\Delta}{4a}$ para $x = -\frac{b}{2a}$ e quando $a < 0$, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui valor máximo $y = -\frac{\Delta}{4a}$ para $x = -\frac{b}{2a}$.

O gráfico da função quadrática admite um eixo de simetria perpendicular ao eixo x e que passa pelo vértice da parábola (IEZZI & MURAKAMI, 2013, p. 152) (Figura 2).

Figura 2. Eixo de simetria de uma função quadrática com a $>$ 0 e $\Delta >$ 0



Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Fonte: Os autores (2023)

Para $x_A = -\frac{b}{2a} - r$, segue que:

$$f(x_A) = f\left(-\frac{b}{2a} - r\right) = a\left[\left(-\frac{b}{2a} - r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[r^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \tag{16}$$

e para $x_B = -\frac{b}{2a} + r$:

$$f(x_B) = f\left(-\frac{b}{2a} + r\right) = a\left[\left(-\frac{b}{2a} + r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[r^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]. \tag{17}$$

Logo,

$$f(x_A) = f(x_B), \tag{18}$$

se e somente se, a parábola possui um eixo de simetria, ou seja, $f(x_A)$ e $f(x_B)$ pertencem ao gráfico da função.

3 CÁLCULO DE RAÍZES A PARTIR DO NÚMERO COMPLEXO

Antes de apresentar e demonstrar o teorema de forma generalizada que leva a determinação das raízes de uma função quadrática utilizando o número complexo na forma algébrica, consideremos, primeiramente, os seguintes exemplos:

Exemplo 1: Seja a função quadrática $f(x) = x^2 - 6x + 8$, queremos obter as raízes x_1 e x_2 sem utilizar a fórmula resolutiva.

Solução: Uma forma de encontrar tais raízes está no procedimento que segue.

Denotamos que $x = m + ni$ em que x representa a raiz da função. Substituindo x na função dada, tem-se que

$$f(m+ni) = (m+ni)^2 - 6(m+ni) + 8 \quad \Longrightarrow \quad 0 = (m+ni)^2 - 6(m+ni) + 8.$$

Desenvolvendo a última expressão, vem que:

$$m^2 + 2mni + (ni)^2 - 6m - 6mi + 8 = 0 \Longrightarrow m^2 + 2mni - n^2 - 6m - 6ni + 8 = 0$$

Agrupando os termos para obter o novo número complexo, obtém-se:

$$(m^2 - n^2 - 6m + 8) + (2mn - 6n)i = 0 + 0i \quad \Longrightarrow \begin{cases} m^2 - n^2 - 6m + 8 = 0 & (I) \\ 2mn - 6n = 0 & (II) \end{cases}$$

Nesse caso, observamos que a igualdade de números complexos conduz a um sistema linear de duas equações e duas variáveis. Logo, de (II), tem-se:

$$2mn - 6n = 0 \quad \Longrightarrow \quad n(2m - 6) = 0$$

De imediato, vamos considerar $n \neq 0$ e mais adiante discutiremos o porquê dessa condição.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Assim,

$$2m - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{6}{2} \quad \Longrightarrow \quad m = 3$$

Fazendo a substituição de m em (I), vem que:

$$m^2 - n^2 - 6m + 8 = 0 \;\Longrightarrow\; 3^2 - n^2 - 6.3 + 8 = 0 \;\Longrightarrow\; -n^2 - 1 = 0 \;\Longrightarrow\; n = \pm i$$

Como se supôs n assumir um valor não nulo, encontramos dois valores para n: $n_1 = i$ e $n_2 = -i$, logo:

$$x_1 = m + n_1 i \;\Longrightarrow\; x_1 = 3 + i.i \;\Longrightarrow\; x_1 = 3 - 1 \;\Longrightarrow\; x_1 = 2$$
$$x_2 = m + n_2 i \;\Longrightarrow\; x_2 = 3 + (-i).i \;\Longrightarrow\; x_2 = 3 + 1 \;\Longrightarrow\; x_2 = 4$$

Para comprovar se os números 2 e 4 são realmente raízes dessa função, faz-se a verificação substituindo na incógnita o valor encontrado. Sendo assim,

i) Para $x = 2$:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 \;\Longrightarrow\; f(2) = 2^2 - 6.2 + 8 = 4 - 12 + 8 = 0.$$

ii) Para $x = 4$:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 \;\Longrightarrow\; f(4) = 4^2 - 6.4 + 8 = 16 - 24 + 8 = 0.$$

Dessa forma, como cada uma das sentenças é verdadeira, conclui-se que a função dada admite raízes 2 e 4.

Exemplo 2: Dada a função $y = 9x^2 + 6x + 10$ e seja um número complexo como sendo as raízes da função dada, obtenha os valores dessas raízes.

Solução: Seja $x = m + ni$ e substituindo na função o valor dado a x, ou seja, substituindo o número complexo dado na função polinomial do 2º grau, vem que:

$$y = 9(m + ni)^2 + 6(m + ni) + 10 \Longrightarrow y = 9m^2 - 9n^2 + 18mni + 6m + 6ni + 10.$$

Sendo x raiz da função, então:

$$y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 9m^2 - 9n^2 + 6m + 10 = 0 & (I) \\ 18mn + 6n = 0 & (II) \end{cases}$$

De (II), vem que:

$$n(18m + 6) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad n \neq 0 \text{ e } m = -\frac{1}{3}.$$

Assim, de (I), tem-se:

$$9m^2 - 9n^2 + 6m + 10 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 9\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 9n^2 + 6\left(-\frac{1}{3}\right) + 10 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad -9n^2 + 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad n = \pm 1$$

Logo, para $n_1 = 1$,

$$x_1 = m + n_1 i \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{3} + i$$

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

e, para $n_2 = -1$,

$$x_2 = m + n_2 i \quad \Longrightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{3} - i$$

Agora, verificando-se, temos:

i) Para $x = -\frac{1}{3} + i$:

$$\begin{aligned} y = 9x^2 + 6x + 10 \quad \Longrightarrow \quad y &= 9\left(-\frac{1}{3} + i\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{3} + i\right) + 10 \\ &= 9\left(\frac{1}{9} - \frac{2}{3}i - 1\right) - 2 + 6i + 10 \\ &= 1 - 6i - 9 + 6i + 8 = 0 \end{aligned}$$

ii) Para $x = -\frac{1}{3} - i$:

$$\begin{aligned} y = 9x^2 + 6x + 10 \quad \Longrightarrow \quad y &= 9\left(-\frac{1}{3} - i\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{3} - i\right) + 10 \\ &= 9\left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}i - 1\right) - 2 - 6i + 10 \\ &= 1 + 6i - 9 - 6i + 8 = 0 \end{aligned}$$

Diante do exposto, os números complexos $-\frac{1}{3} + i$ e $-\frac{1}{3} - i$ são raízes dessa função.

Os dois exemplos dados anteriormente mostram que é possível obter as raízes de uma função quadrática completa sem a necessidade de utilização da fórmula resolutiva. Tendo em vista esses resultados, introduz-se o teorema que segue.

3.1 TEOREMA DAS RAÍZES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

“Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, as raízes x_1 e x_2 de f são obtidas considerando a forma algébrica do número complexo $x = m + ni$, tal que

$$m = -\frac{b}{2a} \text{ e } n = \pm\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}, \text{com } \Delta = b^2 - 4ac." \tag{19}$$

Demonstração:

Seja a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e seja $x = m + ni$ o número complexo de modo que x seja raiz de f, então,

$$f(m + ni) = a(m + ni)^2 + b(m + ni) + c \tag{20}$$

$$a(m + ni)^2 + b(m + ni) + c = 0 \tag{21}$$

Desenvolvendo a expressão (21) e fazendo os agrupamentos, segue que:

$$(am^2 - an^2 + bm + c) + (2amn + bn)i = 0 \tag{22}$$

Observa-se que a igualdade de números complexos conduz a um sistema linear de duas equações e duas variáveis

$$(am^2 - an^2 + bm + c) + (2amn + bn)i = 0 \qquad \begin{cases} am^2 - an^2 + bm + c = 0 & (23) \\ 2amn + bn = 0 & (24) \end{cases}$$

De (II), vem que:

$$2amn + bn = 0 \quad \Longrightarrow \quad n(2am + b) = 0 \tag{25}$$

Considerando $n \neq 0$, então:

$$2am + b = 0 \tag{26}$$

$$m = -\frac{b}{2a} \tag{27}$$

A relação (27) mostra que a parte real do número complexo representa a abscissa do vértice do gráfico de f.

Substituindo o resultado (27) em (23), tem-se:

$$a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - an^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0 \Longrightarrow \quad n^2 = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a^2} \tag{28}$$

Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$, obtém-se:

$$n^2 = -\frac{\Delta}{4a^2} \tag{29}$$

ou,

$$n = \pm\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \tag{30}$$

A expressão (30), mostra que o n representa uma relação com o discriminante da função o qual assumiria o valor nulo apenas quando o Δ também for nulo. Assim, as raízes das funções serão números reais iguais, o que garante que a equação terá que ser um trinômio quadrado perfeito. Por isso considera-se $n \neq 0$ nos exemplos 1 e 2.

Dessa maneira, pode-se substituir os valores obtidos de m e n em x, resultando em,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} i \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} i.i \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \tag{31}$$

Demonstra-se, portanto, uma maneira de obter as raízes da função polinomial do 2º grau utilizando a forma algébrica do número complexo.

Vale ressaltar que apesar dos parâmetros m e n estarem associados a uma expressão envolvendo os coeficientes a, b e c da função quadrática, para o cálculo destes é suficiente fazer uso de recursos

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

da matemática básica, tais como resolução de um sistema linear de variáveis com duas variáveis, desenvolvimento de produtos notáveis e cálculo de valor numérico.

3.2 DISCUSSÃO DAS RAÍZES, FORMA CANÔNICA E VÉRTICE

Nota-se que:

- Se n for imaginário puro, então $x_1 \neq x_2$ serão raízes reais;
- Se n for real não-nulo, então $x_1 \neq x_2$ serão raízes imaginárias (complexas, mas não reais);
- Se n for nulo, então $x_1 = x_2$ serão raízes reais e, dessa forma, a equação será um trinômio quadrado perfeito;

É importante nesse ponto, considerar que em termo de número complexo, a parte imaginária carrega a condição que discute a natureza das raízes e se pode comparar o valor de n com o discriminante da função que também faz análise da natureza das raízes, conforme Quadro 1.

Quadro 1. Comparação entre o discriminante e n para discussão de raízes da equação quadrática

DISCRIMINANTE	PARTE IMAGINÁRIA n	RAÍZES DA EQUAÇÃO QUADRÁTICA
$\Delta > 0$	n é imaginário puro	$x_1 \neq x_2$ serão raízes reais distintas
$\Delta < 0$	n é real não-nulo	$x_1 \neq x_2$ serão raízes imaginárias
$\Delta = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$	n é nulo	$x_1 = x_2$ serão raízes reais iguais

Fonte: Os autores (2023)

Utilizando-se (8), podemos escrever a forma canônica da função quadrática fazendo mudanças de variáveis. Assim,

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a[(x-m)^2 + n^2] \tag{32}$$

Seja a expressão dada em (8), tem-se que:

$$f(x) = a[(x-m)^2 + n^2] = a(x-m)^2 + an^2. \tag{33}$$

é denominado vértice da função quadrática e representa o ponto extremo do gráfico de f. Portanto, verifica-se que a forma canônica pode ser utilizada para obtenção das raízes da função e para determinação das coordenadas do vértice.

Diante disso, o parâmetro m representa a abcissa do vértice (x_V) da parábola da função, enquanto que an^2 configura a ordenada do vértice (y_V) desta parábola. Assim:

$$f(x) = a(x-m)^2 + an^2 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V \tag{34}$$

Portanto,

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

$$V = (x_V, y_V) = (m, an^2) \tag{35}$$

e denominado vértice da função quadrática f.

A seguir abordam-se exemplos que envolvem a fundamentação matemática construída nas seções 3.1 e 3.2.

Exemplo 3: Escreva a forma canônica das seguintes funções quadráticas e, em seguida, determine o vértice da parábola destas mesmas funções.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$;

b) $y = -5x^2 + 2x + 3$

Solução: Tendo em vista o teorema desenvolvido anteriormente, o valor de $x = m + ni$ representa solução da equação. Logo,

a) Para $f(x) = x^2 - 4x + 5$ tem-se que:

$(m + ni)^2 - 4(m + ni) + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad m^2 + 2nmi - n^2 - 4m - 4ni + 5 = 0.$

Assim, $m^2 - n^2 - 4m + 5 = 0$ e $(2m - 4)n = 0$.

Seja $n \neq 0$, então, $2m - 4 = 0$ ou $m = 2$.

Substituindo $m = 2$ em $m^2 - n^2 - 4m + 5 = 0$, resulta em $4 - n^2 - 8 + 5 = 0$ e, portanto,

$$n^2 = 1$$

Usando os valores de m e n^2 na expressão (33), conclui-se que que a forma canônica da função é:

$$f(x) = 1[(x - 2)^2 + 1]$$

Do último resultado é possível extrair diretamente as coordenadas do vértice da parábola, sendo:

$$V = (2{,}1).$$

b) Analogamente, para $y = -5x^2 + 2x + 3$ tem-se que:

$-5(m + ni)^2 + 2(m + ni) + 3 = 0 \Longrightarrow -5m^2 - 10nmi + 5n^2 + 2m + 2ni + 3 = 0$

assim, $-5m^2 + 5n^2 + 2m + 3 = 0$ e $(-10m + 2)n = 0$.

Seja $n \neq 0$, então, $-10m + 2 = 0$ ou

$$m = \frac{1}{5}$$

Substituindo o valor de m em $-5m^2 + 5n^2 + 2m + 3 = 0$, resulta em

$$-5\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 5n^2 + 2\left(\frac{1}{5}\right) + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{5} + 5n^2 + \frac{2}{5} + 3 = 0$$

e, portanto,

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

$$n^2 = -\frac{16}{25}$$

Usando-se os valores de m e n^2 e substituindo na expressão (8), conclui se que a forma canônica da função é:

$$f(x) = -5\left[\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{16}{25}\right].$$

O vértice da parábola é dado por

$$V = \left(\frac{1}{5}, \frac{16}{5}\right).$$

3.3 OUTRAS APLICAÇÕES DO TEOREMA

Esta subseção contempla aplicações na própria Matemática e na Física utilizando o que se propôs neste trabalho, reafirmando a simples aplicabilidade e relevância do teorema apresentado e demonstrado anteriormente.

Aplicação 1:

Determine os pontos de intersecção da parábola da função $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ com o eixo das abscissas utilizando:

a) a fórmula resolutiva;

b) a forma algébrica dos números complexos.

Solução: No instante em que a parábola intersecta o eixo das abscissas o valor de $f(x)$ é igual a zero, ou seja, deseja-se encontrar as raízes da função. Assim:

a) Sendo $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$, tem-se que $a = 3; b = -5$ e $c = -2$, assim,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.3.(-2) = 25 + 24 = 49$$

logo,

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2.3} = \frac{5 \pm 7}{6} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2 \\ x_2 = \frac{5-7}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

b) De acordo com o teorema em 3.1, seja $x = m + ni$ raiz de $f(x)$, então:

$$f(m+ni) = 3(m+ni)^2 - 5(m+ni) - 2$$

$$3m^2 - 3n^2 + 6mni - 5m - 5ni - 2 = 0$$

assim,

$$(3m^2 - 3n^2 - 5m - 2) + (6mn - 5n)i = 0 + 0i \implies \begin{cases} 3m^2 - 3n^2 - 3m - 2 = 0 \\ 6mn - 5n = 0 \end{cases}$$

Usando a segunda equação do sistema, segue que:

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

$$n(6m-5)=0 \quad \Leftrightarrow \quad n \neq 0 \text{ e } m=\frac{5}{6}.$$

Considerando a primeira equação do sistema e substituindo o valor de m:

$$3m^2-3n^2-3m-2=0 \quad \Rightarrow \quad 3\left(\frac{5}{6}\right)^2-3n^2-3\left(\frac{5}{6}\right)-2=0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{147}{36}=3n^2$$

$$\Rightarrow \quad n^2=-\frac{49}{36} \quad \Rightarrow \quad n=\pm\frac{7}{6}i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n_1=\frac{7}{6}i \\ n_2=-\frac{7}{6}i \end{cases}$$

Portanto,

$$x_1=m+n_1i \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{5}{6}+\frac{7}{6}i.i \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{5}{6}-\frac{7}{6} \quad \Rightarrow \quad x_1=-\frac{1}{3}$$

$$x_2=m+n_2i \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{5}{6}-\frac{7}{6}i.i \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{5}{6}+\frac{7}{6} \quad \Rightarrow \quad x_2=2$$

o que mostra que se obtém os mesmos valores.

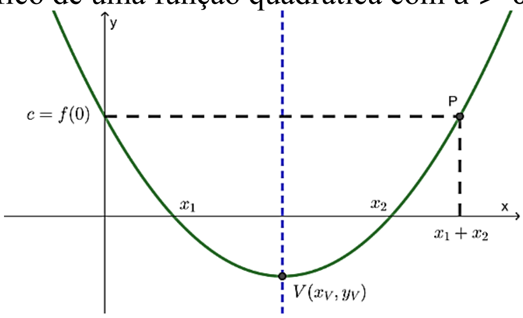
Aplicação 2:

Usando a forma algébrica dos números complexos, prove a recíproca do Teorema de Etiene.

Solução: O Teorema de Etiene enunciado em (MUNIZ, 2019), diz que: “Considere a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, $a \neq 0$. Então o ponto $P=(x_e,c)$ simétrico, com relação ao eixo de simetria da parábola, ao ponto $(0,c)$ é tal que o número x_e é igual a somas das raízes da função $y=f(x)$ ou, equivalentemente, $x_e=-\frac{b}{a}$.”

A *Figura 3* representa uma possível representação gráfica para o teorema exposto.

Figura 3. Gráfico de uma função quadrática com a > 0 e raízes reais



Fonte: Os autores (2023)

Sejam $x_1=m+ni$ e $x_2=m-ni$ as raízes da função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, tem-se que:

$$x_e=x_1+x_2 \quad \Rightarrow \quad x_e=(m+ni)+(m-ni) \quad \Rightarrow \quad x_e=2m.$$

Assim,

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

$$f(x_e) = ax_e^2 + bx_e + c \quad \Rightarrow \quad f(2m) = a(2m)^2 + b(2m) + c$$
$$\Rightarrow \quad f(2m) = 4am^2 + 2bm + c.$$

Como $m = -\frac{b}{2a}$, vem que:

$$f(2m) = 4a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + 2b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \quad \Rightarrow \quad f(2m) = \frac{b^2}{a} - \frac{b^2}{a} + c \quad \Rightarrow \quad f(x_e) = c$$

o que prova a recíproca do teorema de Etiene.

Aplicação 3:

Dada as funções abaixo, determine suas raízes.

a) $f(x) = \frac{1}{2}[(x-4)^2 + 100]$

b) $f(x) = (-2)[(x+3)^2 - 25]$

Solução: Comparando as funções dadas com a expressão (8), percebemos que estas apresentam-se na forma canônica. Assim:

a) $m = 4$ e $n^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad n = \pm 10$

Assim, como n é real, então as raízes de $f(x)$ são complexas (ver *Quadro 1*). De fato,

- para $n = 10$, $x_1 = 4 + 10i$;
- para $n = -10$, $x_2 = 4 - 10i$.

b) $m = -4$ e $n^2 = -25 \quad \Rightarrow \quad n = \pm 5i$

Assim, como n é complexo, então as raízes de $f(x)$ são reais. De fato,

- para $n = 5i$, $x_1 = -3 + 5i.i = -3 - 5 = -8$;
- para $n = -5i$, $x_2 = -3 - 5i.i = -3 + 5 = 2$.

Aplicação 4: Uma partícula desloca-se partindo de uma posição de $10\ m$ e sob um ângulo de 30^0 com a horizontal. Sabe-se que no início do lançamento oblíquo, a velocidade da partícula era $20\ m/s$. Sendo $g = 10\ m/s^2$, obtenha o tempo que o objeto permaneceu no ar.

Solução: Dados $g = 10\ m/s^2$, $H_0 = 10\ m$ e $v = 20\ m/s$. Além disso, como o movimento é parabólico, tem-se que:

$$H = H_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad H = 10 + v_0.sen30^0.t + \frac{1}{2}(-10)t^2$$
$$\Rightarrow \quad H = 10 + 20.\frac{1}{2}.t - 5t^2$$
$$\Rightarrow \quad H = 10 + 10t - 5t^2$$

Seja $t = m + ni$, o tempo em que a partícula permanece no ar, com $t > 0$, então, quando a partícula atinge o solo tem-se $H = 0$. Assim,

$$H = 10 + 10t - 5t^2 \quad \Longrightarrow \quad 10 + 10(m + ni) - 5(m + ni)^2 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad 10 + 10m + 10ni - 5m^2 + 5n^2 - 10mni = 0$$

Logo,

$$(10 + 10m - 5m^2 + 5n^2) + (10n - 10mn)i = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 10 + 10m - 5m^2 + 5n^2 = 0 \ (I) \\ 10n - 10mn = 0 \ (II) \end{cases}$$

De (II), vem que:

$$n(10 - 10m) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad n \neq 0 \text{ e } m = 1.$$

Agora, de (I) e fazendo $m = 1$, obtemos:

$$10 + 10m - 5m^2 + 5n^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 10 + 10.1 - 5.1^2 + 5n^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 15 + 5n^2 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad 5n^2 = -15 \quad \Longrightarrow \quad n^2 = -3 \quad \Longrightarrow \quad n = \pm\sqrt{3}i$$

Como $t = m + ni$, tem-se que

$$t = 1 \pm \sqrt{3}i.i \quad \Longrightarrow \quad t = 1 \mp \sqrt{3}$$

De posse que $t > 0$, então, $t = \left(1 + \sqrt{3}\right)s$, isto é, a partícula leva um tempo de, aproximadamente, 2,73 segundos de permanência no ar.

4 CONCLUSÃO

Ao longo do desenvolvimento deste artigo, apresentou-se um estudo com a função quadrática e cálculo raízes de uma função quadrática fazendo aplicação da forma algébrica dos números complexos com a resolução de um sistema de duas equações lineares e duas incógnitas, m e n. Com base nesse estudo, tornou-se possível a elaboração de uma técnica de resolução para encontrar raízes de uma função polinomial de grau 2 sem a necessidade de introduzir fórmulas presentes na literatura em matemática. Nesse novo método de solução, o aluno desenvolve o cálculo sem a necessidade de memorizar expressões, bastando apenas utilizar o formalismo matemático, como se apresentou nos exemplos 1 e 2 da seção 3.1.

Essa metodologia de encontrar as raízes de uma função polinomial do 2º grau, da maneira como foi exposto nesse artigo, possui grande relevância e uma atenção especial, pois a teoria apresentada tem a vantagem de mostrar que apesar da forma algébrica de um número complexo não está incluso no conjunto dos números reais, pode ser utilizado e aplicado em problemas que podem levar a valores reais ou até mesmo imaginários como se observou nos exemplos e aplicações dadas.

Outro fato de interesse nessa aprendizagem é que a discussão para o estudo das raízes da equação não mais se restringe no discriminante Δ, agora, a discussão das raízes se concentra no parâmetro n (*Quadro 1*), que na verdade representa uma nova abordagem de discussão das raízes da equação polinomial do 2º grau, pois se verificou que para n complexo as raízes são reais, para n real

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

as raízes são complexas e para n nulo as raízes são iguais.

Portanto, a abordagem desenvolvida pode ser utilizada como uma forma alternativa para calcular raízes de uma função quadrática por não se recorrer ao auxílio de fórmulas presentes na literatura matemática e se fazer uso de ferramentas básicas como valor numérico de uma expressão algébrica, o desenvolvimento de produtos notáveis, conhecimentos iniciais do conjunto dos números complexos e resolução de sistema linear de duas equações e duas incógnitas.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. Variáveis Complexas e Aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

BERRIMAN, A. E. The Babylonian Quadratic Equation. The Mathematical Gazette, vol. 40, no. 333, Mathematical Association, 1956, pp. 185–92, *HTTPS://DOI.ORG/10.2307/3608807*

CARMO, M. P. *et al*. Trigonometria e Números Complexos. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. Trigonometria - Números Complexos. Editora IMPAVITAE, 1992.

FRAGOSO, W. C.: Equação do 2º Grau: Uma Abordagem Histórica. 2ª Edição. Ijuí: Unijuí, 1999.

GARBI, Gilberto Geraldo. O Romance das Equações Algébricas. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GIOVANNI JUNIOR, José Ruy & CASTRUCCI, Benedito. A conquista da matemática: 9º ano: ensino fundamental: anos finais. – 4. ed. – São Paulo: FTD, 2018.

IEZZI, Gelson & MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções. 9. ed. – São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, Elon Lages. Números e Funções Reais. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MUNIZ, Leonardo de Oliveira. O Teorema de Etiene [Internet]. RPM. 2019; 99:32-33. [citado em 15 mar 2023]. Disponível em: *HTTPS://PORTAL1.IFF.EDU.BR/NOSSOS-CAMPI/BOM-JESUS-DO-ITABAPOANA/NOTICIAS/TEOREMA-DE-ETIENE-ESTUDANTE-DO-CURSO-TECNICO-EM-QUIMICA-CRIA-TEOREMA-MATEMATICO*.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. RPM. A Fórmula é de Bhaskara? [Internet]. 1º Quadrimestre de 1999; 39:54. [citado em 2 fev 2023]; Disponível em: *HTTP://WWW.RPM.ORG.BR/CDRPM/39/12.HTM*

RIBEIRO, Alessandro J. A noção de equação e suas diferentes concepções: uma investigação baseada em aspectos históricos e epistemológicos. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, vol. 2, n° 1, jan./abr. 2009; ;2(1):70-86, doi: 10.3895/S1982-873X2009000100005