Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

UM ESTUDO DE CASO ENVOLVENDO O LIMITE FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA ADAPTADO PARA DISCENTES COM DEFICIÊNCIA VISUAL

https://doi.org/10.56238/arev7n5-460

Data de submissão: 01/05/2025 **Data de publicação:** 31/05/2025

Juscelândia Vasconcelos

Jorge Brandão

Elisângela Magalhães

RESUMO

Como ensinar Cálculo Diferencial e Integral para discentes cegos incluídos em instituições de ensino superior? Este artigo apresenta um estudo de caso envolvendo uma turma no primeiro semestre de 2024, com 58 estudantes, sendo dois com deficiência visual. O estudo traz a seguinte questão norteadora: De que forma adaptar (ou adequar) a demonstração do limite fundamental da trigonometria visando contemplar a aprendizagem do referido resultado tanto por pessoas com deficiência visual, em particular cegos, quanto por pessoas sem deficiência visual, haja vista discentes sem acuidade visual estarem incluídos em sala de aula regular? Usa e adapta para a trigonometria adequada para sujeitos cegos o método desenvolvido pelo casal Van Hiele. Contemplando – como recorte – alguns diálogos desenvolvidos com dois dos discentes, em ambiente virtual, indica em que nível Van Hiele se encontram os referidos sujeitos selecionados.

Palavras-chave: Educação inclusiva. Cálculo diferencial e integral.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

1 INTRODUÇÃO

A política de inclusão, conforme Lei nº 12.711, de 29 de agosto de 2012, indica:

> Art. 1º As instituições federais de educação superior vinculadas ao Ministério da Educação reservarão, em cada concurso seletivo para ingresso nos cursos de graduação, por curso e turno, no mínimo 50% (cinquenta por cento) de suas vagas para estudantes que tenham cursado integralmente o ensino médio em escolas públicas.

Desta feita, diante da inclusão de discentes com deficiência visual em instituições federais de ensino superior, uma preocupação frequente de docentes que fazem uso de figuras para ensinarem conteúdos matemáticos é: como adequar/adaptar figuras e imagens para pessoas sem acuidade visual sem perca de informações relevantes para a formação de conceito?

No caso particular da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral com uma variável, doravante Cálculo I, raros são os trabalhos que contemplam adequações da referida disciplina contemplando pessoas com deficiência visual. No banco de dissertações e teses da Capes, a partir de 2015, encontramos apenas uma tese que contempla o ensino de volumes – no Cálculo Integral.

Consultando revistas internacionais, contemplando os termos de busca “blind” e “differential and integral calculus”, também não encontramos obras que pudessem somar com o que pretendemos aqui contemplar. Assim, diante da justificativa da existência de poucas pesquisas atreladas ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral para pessoas com deficiência visual, faremos um recorte para o cálculo de limites trigonométricos.

Tem, como objetivo geral, investigar uma forma de abordagem para demonstração do limite fundamental da trigonometria contemplado discentes cegos. Objetivos específicos: desenvolver uma metodologia que contemple tanto sujeitos com deficiência visual quanto sujeitos sem deficiência visual e avaliar se metodologia torna a aprendizagem significativa para discentes.

O estudo traz a seguinte questão norteadora: De que forma adaptar (ou adequar) a demonstração do limite fundamental da trigonometria visando contemplar a aprendizagem do referido resultado tanto por pessoas com deficiência visual, em particular cegos, quanto por pessoas sem deficiência visual, haja vista discentes sem acuidade visual estarem incluídos em sala de aula regular?

Outras questões que surgem, a partir da questão norteadora, são: (a) discentes que não têm deficiência visual participarão de maneira ativa na demonstração do limite fundamental da trigonometria (outra pergunta: o que se entende por “maneira ativa”?)? (b) Qual metodologia melhor se adequa para contemplar ambos sujeitos (com e sem deficiência visual)?

Em relação à contribuição da metodologia, faremos uso da criada por Van Hiele (1986) adaptada para pessoas com deficiência visual sobre as práticas pedagógicas de docentes que lecionam

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

para discentes cegos. Motivo: outras metodologias que investigamos (e vivenciamos) ao longo de mais de 20 anos de magistério não contemplam ambos sujeitos (com ou sem deficiência visual) ou tratam da prática docente. Pretendemos, por conseguinte, contemplar os três: docente, discentes com deficiência visual e discentes sem deficiência visual.

A pesquisa é classificada como exploratória fundamentada em Gil (2019) que apresenta a pesquisa como objetivo de proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses mais definidas. Nesse sentido, a pesquisa tem como objetivo fundamental o aperfeiçoamento de ideias e/ou descobertas de percepções sobre o objeto investigado.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A incapacidade de enxergar integral ou de forma limitada, é chamada de deficiência visual, podendo ser de dois tipos como define o Decreto n.º 5.296 de 2 de dezembro de 2004,

> [...] *cegueira*, na qual a acuidade visual é igual ou menor que 0,05 no melhor olho, com a melhor correção óptica; a *baixa visão*, que significa acuidade visual entre 0,3 e 0,05 no melhor olho, com a melhor correção óptica; os casos nos quais a somatória da medida do campo visual em ambos os olhos for igual ou menor que 60º; ou a ocorrência simultânea de quaisquer das condições anteriores (Brasil, 2004).

Como ministrar aulas para pessoas com deficiência visual? Sabe-se que uma das tarefas de qualquer professor é trabalhar com os educandos a rigorosidade metódica com que devem se "aproximar" dos objetos cognoscíveis. E esta rigorosidade metódica exige tanto do educador quanto do alunado uma postura de investigação, de criação e com humildade, conforme Freire (2005).

Assim sendo, o fato de um discente ter deficiência visual (ou qualquer outra) não implica em ser tratado como um sujeito à parte na sala de aula em escolas regulares ou instituições de ensino superior. Têm dificuldades, mas também têm potencialidades. Desta feita, antes desses sujeitos adentrarem nas escolas regulares é importante ter uma boa preparação nas escolas especializadas (quando for o caso), destacam Lira e Brandão (2013).

Antes de apresentar o método Van Hiele adaptado para pessoas com deficiência visual, convém indicar o que é a metodologia proposta pelo casal Van Hiele.

2.1 MÉTODO VAN HIELE

A teoria de Dina e Peter Van Hiele (1986) refere-se ao ensino e aprendizagem da Geometria. Esta teoria, desenvolvida nos anos 50 do século XX, propõe uma progressão na aprendizagem deste tópico através de cinco níveis cada vez mais complexos. Esta progressão é determinada pelo ensino.

Assim, o professor tem um papel fundamental ao definir as tarefas adequadas para os alunos

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

progredirem para níveis superiores de pensamento. Sem experiências adequadas, o seu progresso através dos níveis é fortemente limitado. Conforme teoria há cinco níveis de aprendizagem da Geometria: visualização (nível 0), análise (nível 1), ordenação (nível 2), dedução (nível 3) e rigor (nível 4).

Na *visualização* os alunos compreendem as figuras globalmente, isto é, as figuras são entendidas pela sua aparência. Os conceitos geométricos são vistos como entidades totais, e não como entidades que têm componentes ou atributos. As figuras geométricas, por exemplo, são reconhecidas por sua forma como um todo, isto é, por sua aparência física, não por suas partes ou propriedades. Neste nível, alguém consegue aprender um vocabulário geométrico, identificar formas específicas e, dada uma figura, consegue reproduzi-la.

Na *análise* os aprendizes entendem as figuras como o conjunto das suas propriedades; por exemplo, através da observação e da experimentação, os alunos começam a discernir as características das figuras. Surgem propriedades que são utilizadas para conceituar classes de configurações. Desta feita, reconhece-se que as figuras têm partes, sendo assim reconhecidas por tais partes.

Na *ordenação*, também identificada como dedução informal, os estudantes ordenam logicamente as propriedades das figuras; fazendo inter-relações. Já são capazes de deduzir propriedades de uma figura e reconhecer classes de figuras. As definições têm significado. Exemplificando: um quadrado é um retângulo porque tem todas as propriedades de um retângulo.

Na *dedução* os discentes entendem a Geometria como um sistema dedutivo; postulados, teoremas e definições já passam a ser compreendidos. Há possibilidades de entender e desenvolver uma demonstração de mais de uma maneira; compreendem condições necessárias e suficientes; são capazes de fazer distinções entre afirmações e recíprocas.

E no *rigor* os alunos estudam diversos sistemas axiomáticos para a Geometria de forma abstrata. A teoria de Van Hiele sugere que o pensamento geométrico evolui de modo lento desde as formas iniciais de pensamento até às formas dedutivas finais onde a intuição e a dedução se vão articulando. As crianças começam por reconhecer as figuras e diferenciá-las pelo seu aspecto físico e só posteriormente o fazem pela análise das suas propriedades.

O modelo visa fornecer uma compreensão daquilo que há de específico em cada nível de pensamento geométrico. Destaca-se que os Van Hiele identificaram algumas generalidades que caracterizam o modelo. É sequencial, pois uma pessoa deve necessariamente passar pelos vários níveis, sucessivamente.

2.2 O MÉTODO GEUMETRIA = EU + GEOMETRIA (VAN HIELE ADAPTADO POR BRANDÃO)

GEUmetria = EU + Geometria é método desenvolvido por Brandão (2010) o qual trata da formação de conceitos geométricos por discentes cegos congênitos incluídos em escolas regulares. Neste método, na etapa inicial, o técnico em OM em conjunto com o professor de apoio pedagógico na área de Matemática e o discente cego introduzem um vocabulário específico. Posição vertical do aluno, ângulo que deve ser formado entre cotovelo, braço e antebraço, são algumas expressões que o aprendiz precisa estar familiarizado.

Há, neste interrogatório inicial, dois propósitos: (1) o docente ficar sabendo quais os conhecimentos prévios de cada aluno e (2) os estudantes ficam sabendo de seus limites, em relação aos conhecimentos matemáticos que possuem. Em seguida, ocorre a orientação dirigida por parte dos professores, conforme os Van Hiele. Após cada atividade de OM é confeccionada uma maquete.

Os alunos constroem as figuras geométricas vivenciadas, é claro, dentro do que é delimitado pelos docentes. Com base nas experiências dos próprios aprendizes, a terceira fase é a explicação. Os discentes expressam seus conhecimentos em relação ao conteúdo. Se, por exemplo, está conceituando paralelogramos, o estudante indica as características deste quadrilátero expressando uma linguagem matemática (lados paralelos, ângulos internos, etc.).

Por fim, é deixado que cada discente indique as figuras de uma maquete, explicitando as em uma linguagem formal. Os alunos fazem uma explanação geral do que aprenderam sobre cada figura. Lembrando que cada figura é analisada pelo tato. O discente localiza um vértice e desliza sobre a figura em questão o tato com o intuito de localizar os demais vértices. Pela quantidade de vértices indica a figura como um todo. Pelas medidas dos lados e características dos ângulos, informa o tipo de figura (por exemplo, quadrilátero, mais precisamente, retângulo)[1].

2.3 TRIGONOMETRIA

Para este trabalho o recorte é o círculo trigonométrico, não obstante, é claro, dos conhecimentos trigonométricos básicos. Segundo Eves (2011) a palavra Trigonometria tem origem grega e seu significado está ligado às medidas de um triângulo (*trigonos*: triângulo e *metrein*: medidas). É a área da Matemática onde se estuda as relações existentes entre os lados e os ângulos de um triângulo. Ela surgiu devido às necessidades da Astronomia, para calcular o tempo e se desenvolveu na Geografia e na Navegação.

[1] Todo quadrado é retângulo, mas nem todo retângulo é quadrado. Com efeito, ambos são paralelogramos. Os ângulos internos de ambos são iguais a 90º. A diferença está no fato de, nos quadrados, todos os lados têm a mesma medida, ao passo que nos retângulos os lados opostos têm a mesma medida.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

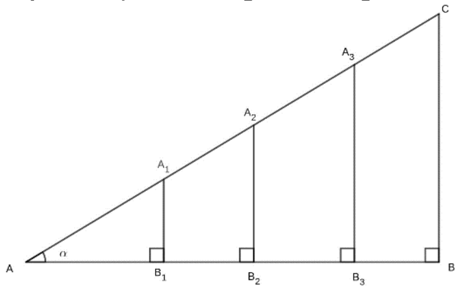
A trigonometria consiste, essencialmente, em associar a cada ângulo α certos números como cosα (o cosseno de α) e senα (o seno de α), cada um dos quais representa, de certo modo, uma espécie de “medida” daquele ângulo. Melhor argumentando, esses números constituem um grande passo à frente nos estudos das chamadas “relações métricas” nos triângulos porque estas, tradicionalmente, estabelecem fórmulas que relacionam entre si comprimentos de segmentos (tais como lados, alturas, bissetrizes, etc.) enquanto as funções trigonométricas relacionam ângulos com lados.

E o que é um ângulo? Um ângulo é caracterizado por um par de semirretas de origem no mesmo ponto. “O” é o vértice do ângulo. As semirretas que formam os lados do ângulo são “r” e “s”. O ângulo marcado pelo arco é rôs. Figura é aqui omitida. Mas uma adaptação é a abertura entre o braço, o cotovelo e o antebraço, conforme Lira e Brandão (2013).

A base teórica na qual se fundamentou originalmente a Trigonometria (Eves, 2011) foi a semelhança de triângulos. Dado um ângulo agudo α, constrói-se um triângulo retângulo ABC, do qual α = BÂC seja um dos ângulos. Se AC é a hipotenusa, define-se cosα = AB/AC e senα = BC/AC. Se tivéssemos construído qualquer outro triangulo AB’C’ de modo análogo, ele seria semelhante a ABC por ter um ângulo agudo comum, logo AB/AC = AB’/AC’ e BC/AC = B’C’/AC’, como se observa na Figura 1.

Portanto, a semelhança de triângulos garante que as definições de cosα e senα são coerentes, isto é, não dependem de qual tenha sido o triângulo retângulo ABC escolhido.

Figura 1 - Representação de triângulos retângulos e semelhantes



Fonte: dados dos autores

2.3.1 Círculo trigonométrico

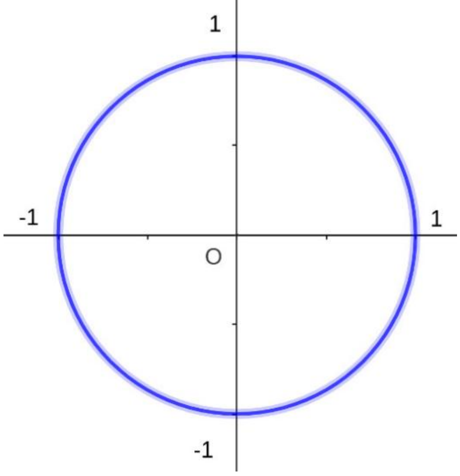
Dado que o foco foi analisar a compreensão de uma demonstração parcial do limite fundamental da trigonometria, segue um pequeno resumo do seno, do cosseno e da tangente. O livro de Elon Lajes Lima (Lima, 2001) – um dos maiores matemáticos brasileiros – será a principal referência desta parte.

Em um sistema cartesiano ortogonal, considerar o ponto A do eixo Ox, de abcissa igual a (1,0).

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Com centro na origem O sistema, será construída uma circunferência que passa por A e que possua, raio unitário, representado na Figura 2.

Figura 2 - Representação círculo trigonométrico



Fonte: dados dos autores

Fica convencionado que o ponto A será a origem dos arcos orientados dessa circunferência, isto é, que para percorrer esses arcos, A será sempre o ponto de partida. Adota-se o sentido anti-horário como sentido positivo e o sentido horário como negativo de percurso. Assim, essa circunferência (de raio unitário e centro em (0, 0)) será denominada ciclo trigonométrico ou circunferência trigonométrica.

A partir do ponto A cada arco trigonométrico tem como extremidade um único ponto na circunferência, sendo comum indicar o arco por esse ponto. Os arcos que têm a mesma extremidade e diferem apenas pelo número de voltas inteiras são chamados de arcos côngruos. Assim os arcos de 400, 4000, 7600 e −3200 são arcos côngruos.

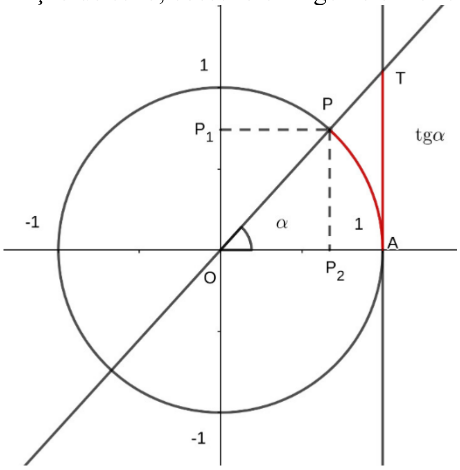
Pode-se escrever uma expressão que representa os arcos côngruos a α das seguintes maneiras: (1) $\alpha + 360^{o} \cdot k$ (quando α medido em graus) para todo $k \in Z$ ou (2) $\alpha + 2k\pi$ (quando α medindo em radianos) para todo $k \in Z$.

Considere, no círculo trigonométrico, um ponto P formando um arco AP no sentido anti-horário cujo ângulo central é α. Sejam P_1 e P_2, respectivamente, as projeções de P nos eixos Y e X, conforme se vê na Figura 3.

- Define-se como seno do arco AP ou do ângulo α ($sen\alpha$) a ordenada do ponto P.
- Define-se como cosseno do arco AP ou do ângulo α ($cos\alpha$) a abscissa do ponto P.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Figura 3 - Representação de seno, cosseno e tangente em círculo trigonométrico



Fonte: dados dos autores

Já para obter a tangente de α (tgα) é necessário traçar um novo eixo (denominado de eixo das tangentes) paralelo ao eixo das ordenadas e que tangencia a circunferência trigonométrica no ponto A. Considere a reta OP e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denomina-se tangente de α (para $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$) e indica-se tg(α) a medida algébrica do segmento de reta AT, conforme indicado na figura 3.

Por fim, como demonstrar o limite fundamental da trigonometria para pessoas cegas? E como analisar pensamento trigonométrico adaptado para cegos?

Há a seguinte proposta, que estamos construindo ao longo das tentativas e erros e observações tanto com discentes[2] nas turmas de Cálculo I quanto com docentes de matemática – em oficinas ou cursos de capacitação que tenho ministrado:

- *Visualização:* As imagens de triângulos ou do círculo trigonométrico são entendidas pela sua aparência.

  No caso dos cegos: percepção tátil de figuras.

- *Análise:* Os aprendizes entendem as figuras como o conjunto das suas propriedades; por exemplo, através da observação e da experimentação, começam a discernir as características das figuras (seno, cosseno, etc.). Surgem propriedades que são utilizadas para conceituar classes de configurações. Desta feita, reconhece-se que as figuras têm partes, sendo assim reconhecidas por tais partes.

[2] Desde 2012, quando professor Brandão teve primeiro contato com uma discente com baixa visão e, de lá até 2023, já lecionou essa disciplina para outros quatro discentes com baixa visão, um com Asperger e dois cegos, um em 2018 e outro em 2023, que apresentamos parte de observações em sala de aula.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Em relação aos cegos: conseguem perceber ou caracterizar as funções trigonométricas a partir de dado ângulo tomado como base. Para tanto, inicialmente identificam o ângulo reto. Em seguida, a partir do ângulo dado, investigam seus catetos adjacente e oposto. No círculo trigonométrico, fazem o mesmo, tendo como referencial o ângulo central.

- *Ordenação*: Há a ordenação lógica das propriedades das figuras; fazendo inter-relações. Já são capazes de deduzir propriedades (exemplo, $\text{sen}t = \text{sen}(\pi - t)$ e $\cos(\pi + t) = -\cos t$) de uma figura e reconhecer classes de figuras. As definições têm significado.

No tocante aos cegos: manipulando figuras (em alto relevo) dadas, conhecendo o que é, por exemplo, sent e cost, sendo t ângulo central, através do tato ativo e sabendo onde (quadrantes) sent e cost são negativos, consegue chegar nos exemplos acima dados.

- *Dedução:* A Trigonometria é compreendida como um sistema dedutivo; postulados, teoremas e definições já passam a ser compreendidos. Há possibilidades de entender e desenvolver uma demonstração de mais de uma maneira; compreendem condições necessárias e suficientes; são capazes de fazer distinções entre afirmações e recíprocas.

Discentes cegos já não precisam das figuras para fazer deduções (em se tratando de resultados). Todavia, diante de situações problemas novos, são capazes de construir figuras e inferir resultados.

- *Rigor:* Diversos sistemas axiomáticos para a Trigonometria de forma abstrata são compreendidos propriedades (já podendo inserir números complexos e coordenadas polares).

Ainda em "construção"! Com efeito, poucos discentes (cegos) estudam números complexos no Ensino Superior.

Na próxima seção abordamos o percurso metodológico.

3 CAMINHADA METODOLÓGICA PARA ADAPTAR E ENSINAR O LIMITE FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA

Para a escrita teórica utilizamos uma pesquisa bibliográfica, conforme Gil (2019, p.44), "[...] a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos". Nesse sentido a principal primazia da pesquisa bibliográfica está no fato de permitir ao pesquisador a aproximação de um conhecimento teórico e favorecer o entendimento e a junção entre teoria e prática e assim coadunar informações para uma análise posterior.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

O estudo de caso, para Yin (2005), define-se como uma investigação empírica, um método que abrange tudo – planejamento, técnicas de coleta de dados e análise dos mesmos. Ao abordar a prática do estudo de caso, é essencial destacar as técnicas e os instrumentos que colaboram com a coleta de dados. Dentre as distintas técnicas e instrumentos, destaco as que utilizei: observação participante, entrevista.

3.1 CARACTERIZAÇÃO DO ESTUDO

Apesar da presença de jovens com deficiência visual nas disciplinas de Cálculo I, em salas de aula de uma universidade pública cearense, o foco era adaptar a demonstração do limite fundamental da trigonometria contemplando tanto sujeitos cegos quanto pessoas sem deficiência visual matriculadas nas referidas disciplinas. Sujeitos com deficiência eram atores principais... mas os demais, não eram "meros coadjuvantes".

A turma de 2024 tinha 58 discentes matriculados. As aulas eram ministradas em dias de segunda-feira e quarta-feira iniciando às 8h00 e terminando entre 9h40 e 10h00, dependia das atividades realizadas. Com efeito, diante da presença do discente cego tornava-se necessário uso de materiais concretos manipuláveis para serem confeccionados em sala, tendo a participação de alguns discentes (discente cego e outros três ou quatro que ficavam vendados e "construíam" objetos para realização das aulas).

Ressalta-se que nem toda aula tinha uso de material concreto manipulável. Com efeito, discentes precisavam, após compreender conceitos, abstrair. Por conseguinte, aulas de cunho teórico eram intercaladas com uso e confecções de materiais direcionados para facilitar aprendizagem.

Oportunamente materiais concretos manipuláveis eram usados em sala de aula tendo alguns alunos sem deficiência visual ficando vendados (eram voluntários). Grupos discentes eram formados. O docente fazia os encaminhamentos e os alunos realizavam as construções. Discente cego ficava sob tutela do docente.

Deixávamos, após cada construção finalizada, que discentes que estavam vendados indicassem as dificuldades que tinham sentido (se os comandos dados eram coerentes, se a maneira como manipulavam os objetos estavam em conformidade com aquilo que se pretendia construir, etc.). Por fim, escutava pessoa cega.

No caso particular do limite fundamental da trigonometria, antes de abordar o referido assunto, discentes foram convidados (na aula que antecedeu a demonstração) a pesquisar aplicações das funções trigonométricas nos seus respectivos cursos. O Movimento Harmônico Simples (M.H.S.) e modelagem de marés foram os dois mais citados. Também foi solicitado que lessem e tentassem compreender a demonstração indicada no livro texto: Leithold.

Não obstante o livro texto utilizado, outras fontes eram indicadas tanto como outros livros quanto como artigos e trechos de dissertações ou teses. Com efeito, os conteúdos eram explorados dentro (na medida do possível e do grau de maturação dos discentes) da realidade de cada curso. Por exemplo: limites eram atrelados às aplicações, tais como velocidade instantânea, densidade volumétrica de uma carga elétrica, entre outras.

Em relação ao ambiente virtual, optamos pelo SOLAR. A principal ferramenta utilizada eram os fóruns de discussão sobre determinado assunto, por exemplo: utilidade dos produtos notáveis; importância dos logaritmos, entre outros tópicos. Fazia um questionamento inicial e, após interações dos sujeitos, fazia mediações (e estimulava que ocorresse diálogo entre eles).

Na próxima seção apresentamos análise e discussão dos dados obtidos.

4 ANALISANDO INFORMAÇÕES DIANTE DA APRESENTAÇÃO DO LIMITE FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA

Uma estratégia básica era apresentar um problema atrelado ao Cálculo e "explorar" todos os conhecimentos (matemáticos e/ou físicos) prévios necessários para resolver o problema (ou demonstração). Em seguida, realizar (quando possível) a adaptação. A discussão foi apresentada a partir da necessidade de encontrar a velocidade de uma partícula em M.H.S. com deslocamento $s(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$, sendo t o tempo (variável) e constantes A (amplitude em metros), ω (velocidade angular em rad/s) e φ_0 (fase inicial em rad).

4.1 LIMITE FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA

Objetivando encontrar a velocidade de uma partícula em M.H.S. com deslocamento $s(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$, conforme indicado anteriormente, o cálculo do limite (a partir de mudanças de variáveis e ajustes na escritas, aqui omitidas) fica:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{z \to 0} \frac{senz}{z}$$

Apresentou-se uma tabela quando z se aproximada de 0 por valores maiores que 0, bem como aproximação por meio de valores menores que 0, para ser complementada pelos participantes. Após

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

diálogo com discentes, foi apresentada uma linha de raciocínio (a partir da discussão indicada em livros didáticos de Cálculo I, como Leithold, 1994):

I. Demonstração delimitada, inicialmente, ao primeiro quadrante.
II. Supor raio unitário. No eixo das abcissas, eixo dos "x", considere o ponto A o ponto de interseção entre a circunferência e o eixo x.
III. Seja O centro da circunferência e considere z o ângulo $A\hat{O}B$, sendo B o ponto de interseção entre a circunferência e a semirreta com origem em O e que está gerando o referido ângulo.
IV. Seja r uma (ou seria "a") reta paralela ao eixo y passando por B. Considere C a interseção da reta r com eixo x.
V. Com base no triângulo COB, sendo $\overline{OB}$ = 1 (pois é o raio), segue-se que $senz = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}}$ ou seja, $\overline{BC} = senz$.
VI. Sabemos que z é ângulo central (não esquecendo raio unitário), logo, o arco de extremidades A e B corresponde ao referido ângulo.
VII. Percebemos que o segmento de extremidades C e B é menor (ou igual) ao arco de extremidades A e B
VIII. Ou seja, senz ≤ z (*como estamos no primeiro quadrante... 0 ≤ (senz)/z ≤ 1*).
IX. E agora? Vamos "prender" a expressão. Seja t uma reta tangente à circunferência em A (*ou seja, t é a reta paralela ao eixo dos y passando por A*). Considere D a interseção entre as retas r e t.
X. Do triângulo AOD, $\overline{AD} = tgz$.
XI. Percebe-se que z ≤ tgz (ou seja, o arco de extremidades A e B é menor (ou igual – em qual condição? – ao segmento de extremidades A e D).
XII. Assim, $z \leq \frac{senz}{cosz}$. Como estamos no primeiro quadrante, podemos reescrever a desigualdade anterior da seguinte forma $cosz \leq \frac{senz}{z}$
XIII. Por conseguinte, $cosz \leq \frac{senz}{z} \leq 1$ e, pelo Teorema do Confronto, quando z se aproxima de 0 (pela direita) segue-se resultado.

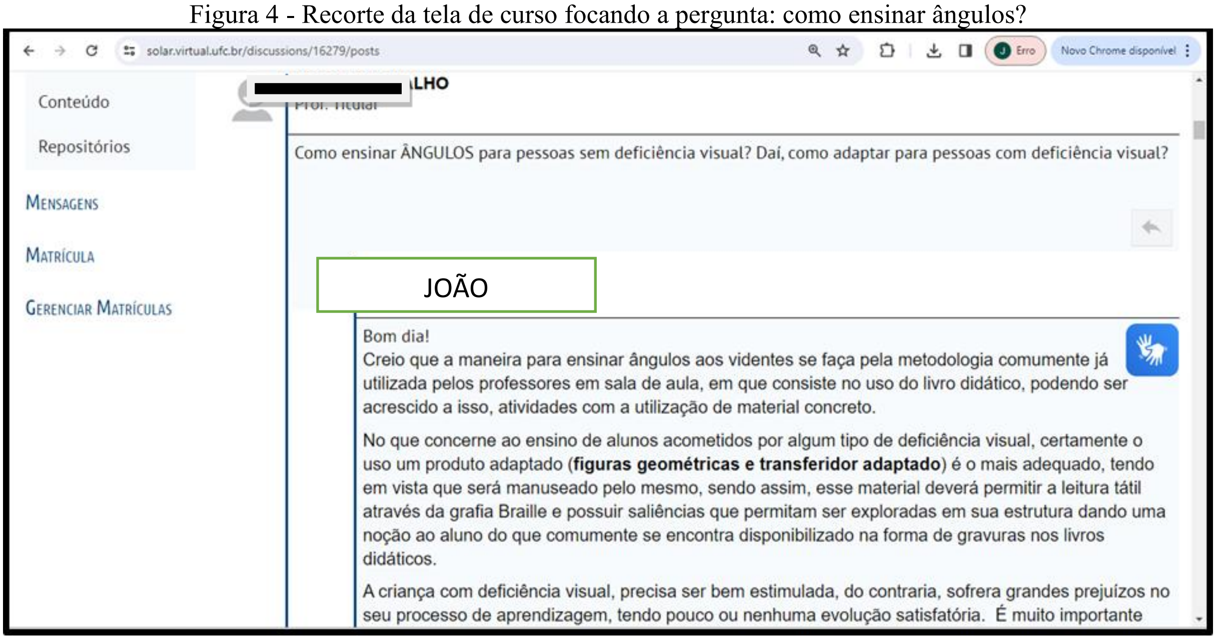
Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

4.2 RECORTE DE ALGUMAS ARGUMENTAÇÕES

Sejam João e Maria nomes fictícios de dois discentes sem deficiência visual (Maria a melhor aluna da turma e João discente mediano)[3] e Vitor nome (também fictício) de discente cego. Diante das tabelas, cujo foco era fazer z se aproximar de zero (uma tabela, assumindo valores próximos de zero, todavia maiores que zero, ou seja, $z \rightarrow 0^+$, e a outra assumindo valores próximos de zero, todavia menores que zero, ou seja, $z \rightarrow 0^-$) calcular senz e, em seguida o quociente (senz)/z – é claro, podiam usar calculadoras! – uma pergunta feita para discentes, era se z estaria em grau ou radiano.

Em seguida, após respostas, indaguei o que eles entendiam por ângulos. Seguem algumas transcrições literais, a partir da plataforma Solar virtual como se observa na Figura 4.

Figura 4 - Recorte da tela de curso focando a pergunta: como ensinar ângulos?



Fonte: dados retirados do ambiente Solar.

Quando indagamos sobre materiais manipuláveis, Maria teceu o seguinte comentário:

> Maria: Ao abordar ângulos no Ensino Fundamental para alunos **sem** deficiência visual, o professor pode utilizar alguns materiais concretos como o transferidor de 360º e/ou 180º, e uma régua, como uma forma de ampliar os conhecimentos trazidos nos livros didáticos, os quais geralmente são utilizados pelos docentes como suporte.
> Ao tratar sobre o mesmo assunto para alunos com deficiência visual, o professor pode propor o uso de materiais mais fáceis de serem manipulados e tateados pelos estudantes. Como a dobradura com papel (https://www.youtube.com/watch?v=-G9cCW-qbgQ), e até algo mais elaborado como uma pizza de 8 fatias em E.V.A., já com as partes pré-cortadas (tutorial de como fazer a pizza: https://www.toutube.com/watch?v=JhzDWngjaB0).

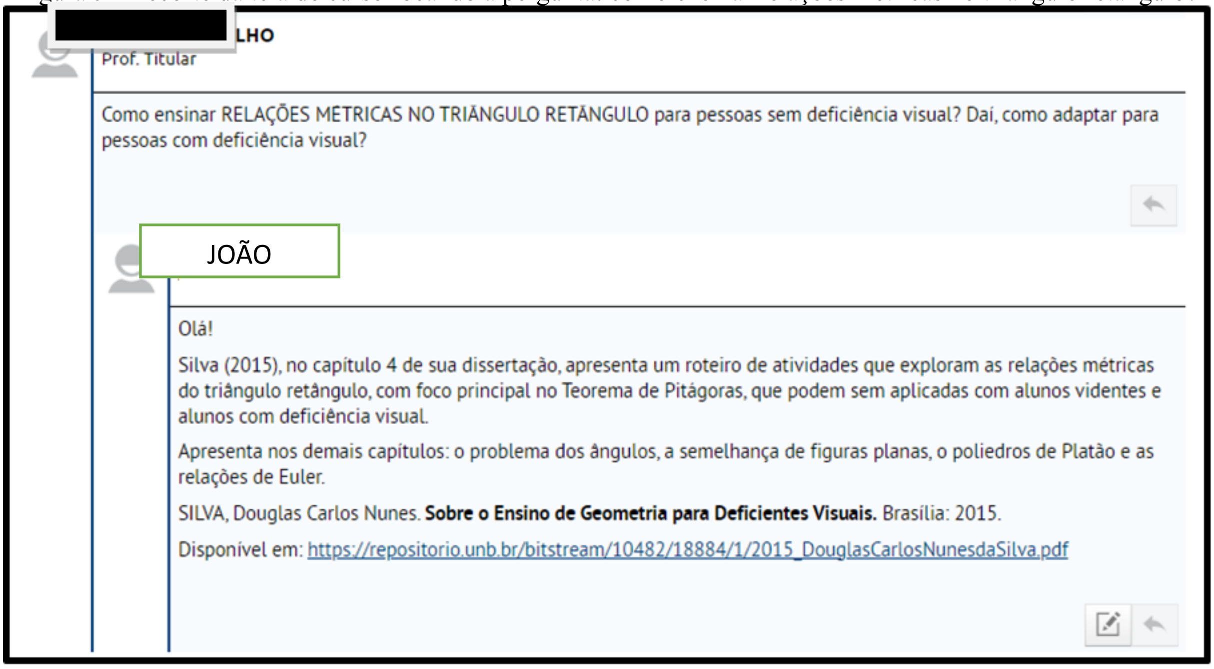
[3] Diante de 54 discentes que concluíram a disciplina fica inviável apresentar as argumentações de todos. Desta feita, apresento Maria – discente com melhor média nas avaliações – e João – escolhido aleatoriamente entre os discentes que tiraram média em torno de sete.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Quando indagados se haveria ou não uma limitação ao uso do gráfico de pizzas em E.V.A. João não respondeu e Maria indicou que, no caso do exemplo dado, o ângulo fica fixo. Mas poderia usar (no sentido de confeccionar) pizzas com 6 ou 10 fatias, mostrando a aplicabilidade da ideia dada.

Conforme o foco limite fundamental da trigonometria (LFT), sendo necessário conhecimento sobre arcos a partir do ângulo central, os participantes foram indagados sobre as relações métricas no triângulo retângulo. Bem como relacionar seno e cosseno de um dado ângulo central, como se observa na Figura 5 a resposta de um dos participantes.

Figura 5 - Recorte da tela de curso focando a pergunta: como ensinar relações métricas no triângulo retângulo?



Fonte: dados retirados do ambiente Solar.

Tanto João quanto Maria indicaram o teorema de Pitágoras para obter (algumas) relações métricas. Não apresentaram dificuldades em relacionar seno e cosseno a partir do ângulo central fornecido. Apresentaram figuras no ambiente solar que ilustravam, coerentemente, os argumentos dados para obter seno e cosseno.

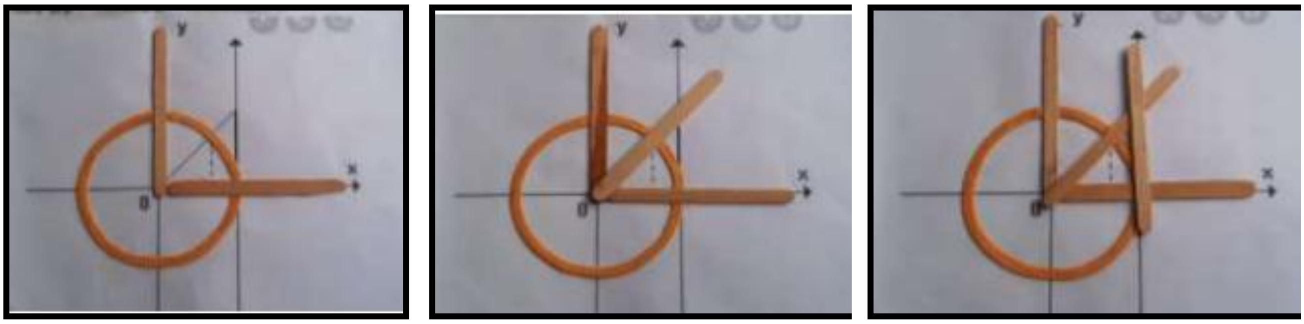
Em relação à obtenção da relação entre ângulo central e arco que o forma, ou em relação ao motivo do raio ser unitário, não apresentaram dificuldades em argumentar. João, a partir da postagem sobre o motivo de considerar raio unitário não participou mais do fórum, ficando um monólogo entre docente e Maria.

Quando indagada o motivo de, na demonstração do limite fundamental da trigonometria, traçar uma reta tangente à circunferência no ponto A(1, 0), Maria não soube explicar o motivo (não conseguiu

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

fazer uso coerente da dica *teorema do confronto*). Mas, quando solicitada a apresentar uma adaptação, fez uso sucessivo das imagens apresentadas a seguir.

Ela desenhou inicialmente a situação envolvendo o problema resolvido, isto é, eixos x e y, um ângulo central que envolverá o arco e o seno do ângulo, bem como a tangente no ponto A(1, 0). Então, usou palitos de picolé para representar os semieixos $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ no sistema de coordenadas cartesianas. Barbante (amarelo) para indicar as bordas da circunferência, como vemos na Figura 6.



6ª 6B 6C

Fonte: dados retirados do ambiente Solar.

Na Figura 6B, foi inserido outro palito de picolé, a partir da origem do sistema de coordenadas cartesianas, para gerar o ângulo z. Continuei instigando Maria para saber o próximo passo na demonstração do referido teorema. Daí, para a construção ela precisou recordar que ao gerar (senz)/z usará o teorema do confronto. Devendo ter em mente que será traçada uma reta tangente à circunferência, paralela ao eixo y (vide Figura 6B). Vale ressaltar que Maria não conseguiu avançar sozinha (sem auxílio de dicas!)

Na Figura 6C, há um palito para indicar o ângulo central. Até este momento, Maria agiu sozinha, só com base nas informações. Mas, para a Figura 6C, precisou de várias orientações da minha parte, como o motivo da representação da reta tangente (e paralela ao eixo y).

Em conformidade com os níveis Van Hiele, dado que João não participou de todas as etapas, e não justificou motivo da ausência (se por razões de trabalho ou desinteresse pelo curso ou se não sabia mais responder as indagações) não é possível indicar com certeza em qual nível está. Maria, que debateu, quando foi instigada sobre relações no círculo trigonométrico, soube identificar e justificar quem eram senz e cosz bem como obter o quociente entre senz e z (a partir da relação entre o seno do ângulo central e o arco gerado por este) e o motivo deste quociente tender para 1 quando z tende para 0 (pela direita).

Todavia, não soube explicar como fazer uso do teorema do confronto e, consequentemente, o motivo de ter que traçar reta tangente à circunferência em A(1, 0) e paralela ao eixo dos y. Quando

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

indagada se conhecia outras formas de demonstrar o teorema (diante de várias “dicas” dadas por mim, em situações de cunho prático do uso do LFT), respondeu não saber.

Nas considerações apresento em que nível Van Hiele se encontram João e Maria. E o Vitor? Teve pouca participação no ambiente virtual. Tratava de retirar dúvidas com colegas mais próximos ou diretamente comigo quando esses colegas não respondiam de maneira satisfatória seus questionamentos.

Em relação à pergunta sobre ângulo, com base nas técnicas de Orientação e Mobilidade que foram apresentadas no início das aulas (no início do semestre, quando apresento formas de interação com discentes com algumas particularidades), relacionou como abertura entre dois dedos consecutivos ou entre braço, cotovelo e antebraço. Vale destacar que poucos discentes sem deficiência visual recordaram tal informação.

No tocante à construção de tabelas, sem dificuldades, pois usou calculadora em notebook que tem o DosVox[4]. Agora, em relação às construções apresentadas, rever três últimas figuras, ele afirmou que uso de palitos de picolé faziam ele perder um pouco uma “noção” de cada situação – nas outras turmas, discentes não fizeram tal sinalização! Segundo ele:

> Vitor: Pelas tabelas estou entendendo que quanto mais próximo z está de 0, ou por valores maiores que ele ou por valores menores que ele, a divisão entre o senz e o z fica cada vez mais perto de 1. Não tenho dificuldades em corresponder ângulo (central) como abertura parte de cima do braço, cotovelo e parte de baixo do braço (Vitor aponta para o referido “ângulo” e mexe, fazendo variações). Não estou entendendo a figura 8. Por que teve de passar paralela ao eixo Y?

Fiz leitura do texto indicado no livro do Leithold. Perguntei se ele compreendia o que dizia (a demonstração do) texto. Ele disse que em parte. Reapresentei outra figura, usando a base circular de uma boleira para indicar a região e usei espetos de churrasco (de madeira, finos e sem ponta). Recordei os conceitos de seno, cosseno e tangente e solicitei que ele os indicasse na figura.

Assim como Maria, teve dificuldade em compreender o motivo da construção apresentada na última figura. Perguntei se ele conhecia, a partir da leitura de outros textos indicados por colegas, outras formas de demonstração do limite fundamental da trigonometria. Afirmou não se lembrar.

[4] Recomendo, para mais detalhes: https://tic.ufrj.br/saiba-mais-sobre-o-dosvox/#:~:text=O%20Dosvox%20permite%20que%20seus,em%20atividades%20profissionais%20e%20acad%C3%AAmicas.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

5 CONCLUSÃO

Mudar o pensamento, as atitudes, a maneira de avaliar as situações não é uma atividade fácil, e algumas vezes durante a caminhada quase se caiu no erro, tão duramente criticado, de reproduzir modelos e metodologias de ensino, sem antes os criticá-los ou levar em consideração a realidade da sala de aula.

Utilizar uma prática que permita a ampliação dos conteúdos por meio das interações discursivas entre aluno/professor e que por essa característica permite as transformações de comportamento e atitudes dos docentes frente aos alunos, no que se refere à motivação, interesse, curiosidade e participação no desenvolvimento das aulas, possivelmente seja a resposta que tanto procuramos.

Recordo que minha pergunta norteadora foi: De que forma adaptar (ou adequar) a demonstração do limite fundamental da trigonometria visando contemplar a aprendizagem do referido resultado tanto por pessoas com deficiência visual, em particular cegos, quanto por pessoas sem deficiência visual, haja vista discentes sem acuidade visual estarem incluídos em sala de aula regular?

Dado que existe uma necessidade de que os docentes desenvolvam práticas pedagógicas e que o estudante desenvolva uma postura de pesquisador e o levam a sair da postura de expectador, sendo possível articular ideias, participar da elaboração do conhecimento e justificando essa elaboração, foi possível através da pesquisa evidenciar que durante o processo de ensino e aprendizagem, a prática pedagógica exige criatividade, disposição ao novo, organização, planejamento e atenção às demandas e peculiaridades de cada estudante.

Em relação aos níveis Van Hiele, que envolvem trigonometria e círculo trigonométrico, “visualização” e “análise” foram plenamente contempladas. Todavia, João, que não participou e não justificou o motivo da ausência nos debates finais sobre o LFT, pode estar, em relação à temática, no nível da “ordenação”, também identificada como “dedução informal”.

Com efeito, com base em suas explanações, ordena logicamente as propriedades das figuras; faz inter-relações e é capaz de deduzir propriedades de uma figura e reconhecer classes de figuras.

Em relação à Maria, tudo indica que ela está no nível da “dedução”. Com efeito, entende o conteúdo visto como um sistema dedutivo; compreende postulados, teoremas e definições bem como condições necessárias e suficientes; faz distinções entre afirmações e recíprocas. O mesmo penso em relação ao Vitor.

Não estão, Maria e Vitor, no “rigor” porque não entenderam e, por conseguinte, não desenvolveram a demonstração do LFT de mais de uma maneira, embora consigam pensar e argumentar (em algumas ocasiões) de forma abstrata.

Dado que a teoria de Van Hiele sugere que o pensamento geométrico (e trigonométrico) evolui de modo lento desde as formas iniciais de pensamento até às formas dedutivas finais onde a intuição e a dedução se vão articulando, torna-se necessário aprofundar os estudos realizados tanto com Vitor, João e Maria, em outras situações mais focadas, como em disciplinas de Álgebra Linear ou Cálculo II.

Em relação aos objetivos específicos, foram contemplados parcialmente. Com efeito, a variável “sujeito” é muito “variável”. Os primeiros discentes com deficiência visual, por exemplo, não apresentaram rejeição ao uso de palitos de picolé, entretanto, também não compreenderam a demonstração do LFT. Ficando parecidos, em relação ao nível de Van Hiele, com o “João” desta turma de 2023.

Já em relação ao segundo objetivo específico, discentes entendem aplicações (que precisam gerar o LFT para conseguir resolver limites que envolvem funções trigonométricas com a indeterminação 0/0) mesmo sem compreender a demonstração do LFT.

Assim, como considerações para um futuro próximo, pretendo acompanhar discentes em disciplinas como Cálculo II ou Cálculo III, onde sejam necessários usos dos conhecimentos adquiridos, para saber se, de fato, aprendizagem se deu de maneira satisfatória ou não satisfatória. Com efeito, praticar é uma boa forma de demonstrar saberes.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

REFERÊNCIAS

BRANDÃO, J. C. Matemática e deficiência visual. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 2010.

BRASIL. Decreto nº 5.296, de 2 de dezembro de 2004. Estabelece normas gerais e critérios básicos para a promoção da acessibilidade das pessoas portadoras de deficiência ou com mobilidade reduzida, e dá outras providências. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 2 dez. 2004. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2004-2006/2004/Decreto/D5296.htm#art4iii. Acesso em: 12 out. 2023.

EVES, H. Introdução à história da matemática. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FREIRE, P. Pedagogia do oprimido. 17. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005.

GIL, A. C. Como elaborar projetos de pesquisa. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2019.

LEITHOLD, L. O cálculo com geometria analítica. v. 1. São Paulo: Harper & Row, 1994.

LIMA, E. L. A matemática do ensino médio. Coleção do Professor de Matemática. v. 1. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LIRA, A. K. M.; BRANDÃO, J. C. Matemática e deficiência visual. Fortaleza: EdUFC, 2013.

SANTOS, R. A. dos. O modelo de Van Hiele e a teoria dos campos conceituais: complementaridade na conceitualização de prisma e pirâmide. 2023. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2023.

VAN HIELE, P. M. Structure and insight: a theory of mathematics education. Orlando: Academic Press, 1986.

YIN, R. K. Estudo de caso: planejamento e métodos. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.