Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

PÊNDULO NÃO LINEAR: APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL E REFLEXÕES SOCIOAMBIENTAIS

https://doi.org/10.56238/arev6n4-312

Data de submissão: 19/11/2024 **Data de publicação:** 19/12/2024

Luciano Feliciano de Lima
Doutor em Educação Matemática
Universidade Estadual de Goiás (UEG)
E-mail: luciano.lima@ueg.br

Marcelo Henrique Belonsi
Doutor em Engenharia Mecânica
Universidade Estadual de Goiás (UEG)
E-mail: marcelo.belonsi@ueg.br

Maria Francisca da Cunha
Doutora em Educação Matemática
Universidade Estadual de Goiás (UEG)
E-mail: maria.cunha@ueg.br

Rogério Ferreira da Costa
Doutor em Engenharia Nuclear
Universidade Estadual de Goiás (UEG)
E-mail: rogerio.costa@ueg.br

RESUMO
Este estudo utiliza a modelagem matemática de um pêndulo para ensinar equações diferenciais, unindo simulação computacional e reflexão socioambiental. Representando um sistema dinâmico que adquire complexidade à medida que aumentam as oscilações, o pêndulo possibilita aos estudantes explorar diferentes comportamentos desde conservativo (regime linear) até caóticos. A metodologia qualitativa, com observação participante e entrevistas, recorre a ferramentas como a transformada Rápida de Fourier para fins de análise do fenômeno não linear e,método de Runge-Kutta para simulação de diversos cenários (linear/não linear), permitindo projetar o uso da metodologia para fins de análise prática e crítica de fenômenos como mudanças climáticas e uso de recursos naturais. Inspirado na Educação Matemática Crítica (EMC), o estudo busca formar cidadãos críticos que vejam a matemática como ferramenta para interpretar e transformar a realidade, em sintonia com a ideia de "matemática em ação" defendida por Freire e Skovsmose. Assim, conclui-se que a modelagem do pêndulo não linear contribui tanto para o ensino das equações diferenciais quanto para o desenvolvimento de uma consciência socioambiental e uma educação voltada à justiça social.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Educação Matemática Crítica, Comportamento Caótico, Ferramenta Educacional, Bioinsumos.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

1 INTRODUÇÃO

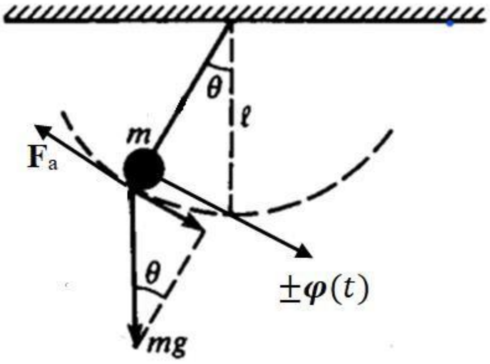
O estudo dos sistemas dinâmicos e suas características, tanto lineares quanto não lineares, tem se mostrado fundamental em diversas áreas da ciência e tecnologia, como a Física, a Engenharia e a própria Matemática. Um dos sistemas mais emblemáticos nesse contexto é o pêndulo simples, amplamente utilizado para ilustrar fenômenos oscilatórios. Quando pequenas oscilações são consideradas, o sistema pode ser descrito como linear, com comportamento periódico previsível. No entanto, quando se introduzem oscilações maiores ou excitações externas, o comportamento não linear emerge, resultando em dinâmicas complexas, frequentemente caóticas (Savi, 2006).

O pêndulo, que consiste em uma massa presa a um fio inextensível acoplado a um ponto fixo, é regido pela equação diferencial não linear (1), que descreve seu movimento:

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + cl\frac{d\theta}{dt} + mgsen(\theta) = \varphi(t) \qquad \text{(equação 1)}$$

em que m é a massa da esfera [kg], l o comprimento do fio [m],c a constante de amortecimento [kg/s], g a aceleração gravitacional [m/s²], θ o deslocamento angular [rad] e $\varphi(t)$ a força de excitação externa, conforme explicitado na figura 1.

Figura 1: Pêndulo simples não linear.



Fonte: Adaptado de Leithold (1982).

Neste trabalho, considera-se a resistência do ar, que introduz um fator de amortecimento ao sistema. A força de resistência é proporcional à velocidade angular do pêndulo e descrita pela equação (2):

$$\boldsymbol{F_a} = -c\frac{d\theta}{dt} \qquad \text{(equação 2)}$$

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

A partir dessas equações, o comportamento do sistema pode ser estudado em diferentes cenários. Quando se trata de pequenas oscilações, a equação pode ser linearizada e o movimento é aproximado por uma função senoidal. No entanto, ao abandonar a hipótese de pequenos deslocamentos, surgem as não linearidades, levando a comportamentos mais complexos e muitas vezes imprevisíveis, como descrito pela simulação numérica do método de Runge-Kutta.

A modelagem matemática via simulação computacional, como a utilizada neste estudo, não apenas permite a análise detalhada de sistemas dinâmicos, mas também amplia as possibilidades de exploração de fenômenos que, no mundo físico, poderiam ser difíceis de reproduzir. Além disso, o uso de ferramentas como a Transformada Rápida de Fourier (FFT) (Spilsbury, 2016) permite capturar a evolução dos fenômenos não lineares ao longo do tempo, evidenciando como pequenas perturbações podem induzir grandes variações no sistema, como mostrado pela figura 1.

A relevância desses modelos vai além das aplicações técnicas. Em um contexto de Educação Matemática Crítica (EMC), a modelagem de sistemas dinâmicos pode ser utilizada para discutir questões sociais, ambientais e de sustentabilidade (Skovsmose, 2001). Por exemplo, a oscilação de um pêndulo pode ser analogamente comparada à oscilação de recursos naturais ou mesmo à propagação de doenças, como em epidemias. A simulação computacional de cenários não lineares, como o estudo do pêndulo com excitação externa, permite que estudantes reflitam sobre as interações complexas presentes em fenômenos socioambientais, ou seja, como alterações em parâmetros físicos, geométricos, de condições iniciais/de contorno e, principalmente forças externas podem afetar significativamente o comportamento dos sistemas dinâmicos que modelam os mais diversificados sistemas, dentre eles os socioambientais.

Assim, este trabalho propõe investigar como a modelagem matemática do pêndulo não linear, utilizando equações diferenciais e simulação computacional, pode ser aplicada no ensino de equações diferenciais para promover uma reflexão crítica sobre questões socioambientais. O pêndulo não linear é uma ferramenta pedagógica valiosa para a compreensão de equações diferenciais e sistemas mecânicos, e, também, para estimular a conscientização crítica dos estudantes sobre como a matemática pode ser usada para analisar e resolver problemas reais e complexos.

Sob a perspectiva da EMC, o ensino de equações diferenciais por meio de modelos como o pêndulo não linear oferece uma oportunidade única de interligar a matemática com questões éticas, sociais e ambientais. A incorporação de temas como sustentabilidade e justiça social, conforme defendido por teóricos como Paulo Freire, contribui para uma educação matemática que vai além do domínio técnico, promovendo o desenvolvimento de uma consciência crítica e reflexiva, necessária para a transformação social.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

2 PÊNDULO NÃO-LINEAR E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: OPORTUNIDADES PARA REFLEXÃO

A modelagem matemática pode ser uma ferramenta valiosa no ensino de equações diferenciais porque viabiliza aos estudantes a compreensão de fenômenos complexos por meio de representações matemáticas. O pêndulo não linear, em particular, destaca-se como um sistema relevante para viabilizar tal abordagem devido à sua dinâmica complexa e aplicabilidade em contextos reais.

Estudos recentes têm explorado as complexidades associadas ao comportamento não linear do pêndulo, oferecendo oportunidades para fomentar uma reflexão crítica sobre questões socioambientais. No entanto, observa-se uma lacuna na aplicação pedagógica desses conceitos no ensino de equações diferenciais (Jia et al., 2020; Rahimi Dolatabad et al., 2022; Kundu; Chatterjee, 2022; Labetoulle; Savadkoohi; Gourdon, 2022; Arango, 2021; Ochkov et al., 2023). Embora esses estudos forneçam reflexões valiosas sobre dinâmicas não lineares e utilizem abordagens teóricas e numéricas avançadas, eles não aprofundam estratégias pedagógicas para integrar essas descobertas no contexto educacional, especialmente para promover reflexões críticas sobre sistemas dinâmicos complexos e questões socioambientais.

Para preencher essa lacuna, diversas metodologias têm sido propostas, enfatizando abordagens que promovem o pensamento crítico e a aprendizagem significativa. A "Aprendizagem Contextual" destaca-se por conectar os conceitos matemáticos às experiências de vida dos estudantes, permitindo que relacionem problemas matemáticos a situações reais (Khotimah; Masduki, 2016). Essa abordagem promove uma compreensão mais profunda e crítica do conhecimento, encorajando os estudantes a refletirem sobre o impacto socioambiental de suas ações.

A utilização de tecnologias digitais e simulações computacionais tem se mostrado uma maneira de enriquecer o ensino de equações diferenciais e modelagem matemática. Essas ferramentas proporcionam ambientes de aprendizagem interativos e adaptativos, facilitando a participação ativa dos estudantes e promovendo uma compreensão mais profunda por meio da experimentação e refinamento de modelos. A integração de simulações em diferentes níveis de automação auxilia na transição dos alunos de atividades manuais para digitais, fortalecendo conceitos algorítmicos e de modelagem (Grandgenett et al., 2000; Greubel et al., 2022; Cevikbas; Greefrath; Siller, 2023). Além disso, o uso de tecnologias avançadas, como redes neurais informadas por física e modelagem substituta baseada em aprendizado ativo, expande as possibilidades de simulação de sistemas não lineares complexos no contexto educacional (Moya; Lin, 2021; Kapadia; Feng; Benner, 2023).

Integrar recursos tecnológicos, como softwares de simulação e visualização gráfica, é outra estratégia eficaz. O uso do GeoGebra, por exemplo, facilita a exploração de múltiplas representações

Revista
ARACÊ
ISSN: 2358-2472

e equilibra as abordagens analítica, gráfica e numérica no ensino de equações diferenciais (Igliori; Almeida, 2017). Essa integração tecnológica permite que os estudantes interajam com modelos dinâmicos, como o pêndulo não linear, promovendo a autonomia do aprendizado e aprofundando a compreensão dos fenômenos estudados.

A conexão entre modelagem matemática e compreensão de fenômenos reais pode ser uma maneira de engajar os estudantes e desenvolver habilidades críticas. A aplicação de modelos matemáticos a problemas do cotidiano, como pandemias (Meyer; Lima, 2023), evacuações (Greubel et al., 2022) e sistemas físicos complexos, permite que os alunos analisem o impacto de diferentes variáveis e políticas, promovendo uma reflexão crítica sobre decisões públicas e questões socioambientais. A modelagem de sistemas como o pêndulo não linear pode ser utilizada para explorar fenômenos naturais e discutir implicações ambientais, incentivando a consciência sobre sustentabilidade e uso de recursos naturais (Kapadia; Feng; Benner, 2023; Balseca et al., 2023).

A “Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL)” é outra metodologia que coloca os estudantes como agentes ativos em seu processo de aprendizado, utilizando problemas reais como ponto de partida (Santos et al., 2020). Essa abordagem promove a autonomia e o pensamento reflexivo, incentivando os estudantes a aplicarem seu conhecimento em situações práticas, o que é particularmente relevante no estudo de sistemas como o pêndulo não linear.

A utilização de atividades de modelagem matemática no contexto STEM[1] tem mostrado aumento significativo nas habilidades dos alunos, incentivando a resolução de problemas complexos e a colaboração (Armutcu; Bal, 2023; Greubel et al., 2022). Além disso, a formação de professores é destacada como elemento crucial para a implementação eficaz dessas abordagens, necessitando de estratégias que considerem as especificidades dos estudantes e suas dificuldades com o tema (Andresen, 2023; Balseca et al., 2023; Vitória et al., 2021).

A aplicação de “problemas não rotineiros” e a formação de professores para melhorar a compreensão dos alunos em cursos de equações diferenciais também são consideradas abordagens relevantes (Bibi et al., 2019). Afinal, a ênfase em problemas que exigem raciocínio crítico e soluções criativas desenvolve a capacidade dos estudantes de pensar criticamente ao enfrentar situações inéditas, alinhando-se aos princípios da educação matemática crítica.

O desenvolvimento de materiais didáticos baseados em “Higher Order Thinking Skills (HOTS)” visa promover o pensamento crítico e habilidades de resolução de problemas (Arfinanti,

[1] O contexto da educação STEM refere-se a uma abordagem educacional integrada que combina as áreas de Ciência (Science), Tecnologia (Technology), Engenharia (Engineering) e Matemática (Mathematics). O objetivo principal da educação STEM é preparar os alunos para enfrentar desafios do mundo real, desenvolvendo habilidades críticas para o século XXI, como pensamento crítico, resolução de problemas, inovação e colaboração.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

2020). Essa abordagem desafia os alunos a analisar, avaliar e criar soluções para problemas complexos, contribuindo para a formação de uma autonomia intelectual e uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos.

A modelagem matemática se apresenta como uma ferramenta poderosa para o desenvolvimento do pensamento crítico e reflexivo dos estudantes. Ao trabalhar com modelos que envolvem fenômenos reais e variáveis contextuais, os alunos são estimulados a analisar criticamente o impacto de diferentes fatores e decisões, promovendo não apenas o aprendizado de conceitos matemáticos, mas também a consciência sobre questões socioambientais (Meyer; Lima, 2023; Armutcu; Bal, 2023; Cevikbas; Greefrath; Siller, 2023).

Uma "educação matemática investigativa" também pode contribuir para a promoção de ambientes de aprendizagem que desafiam os estudantes a explorar conceitos fundamentais das equações diferenciais, incentivando o desenvolvimento de uma visão crítica e questionadora dos conceitos matemáticos (Rogovchenko; Rogovchenko,2022). No contexto do pêndulo não linear, tarefas investigativas podem envolver a análise de comportamentos não lineares complexos, estimulando os estudantes a aprofundarem sua compreensão e a refletirem sobre implicações socioambientais.

Embora as tecnologias digitais ofereçam diversas vantagens, como melhorias na visualização de dados e validação de soluções, há desafios a serem enfrentados. A falta de competência tecnológica entre alunos e professores e a ameaça da "caixa preta", em estudantes podem confiar cegamente nas soluções geradas pelas ferramentas, podem limitar o aprendizado efetivo (Cevikbas; Greefrath; Siller, 2023; Andresen, 2023). Por isso, é urgente o desenvolvimento de estratégias pedagógicas que promovam uma compreensão dos princípios matemáticos subjacentes, evitando a dependência excessiva das soluções automáticas e promovendo a autonomia dos alunos no processo de modelagem (Andresen, 2023; Greubel et al., 2022).

A inovação no ensino de equações diferenciais por meio da integração de experimentos matemáticos e recursos digitais também é enfatizada (Zhao, 2022). A ênfase na investigação guiada e na exploração independente dos problemas pode desenvolver a autonomia e a capacidade de descoberta dos alunos, preparando-os para manipular o conhecimento de forma significativa e contextualizada.

A utilização de métodos computacionais avançados, como redes neurais informadas por física e modelos substitutos baseados em aprendizado ativo, tem expandido as possibilidades de simulação de sistemas não lineares complexos no contexto educacional. Esses métodos permitem simulações mais eficientes e precisas, possibilitando que os alunos explorem sistemas dinâmicos complexos e compreendam a sensibilidade a variações paramétricas (Moya; Lin, 2021; Kapadia; Feng; Benner, 2023). A integração dessas técnicas no ensino de equações diferenciais oferece oportunidades para aprofundar o entendimento sobre a modelagem de sistemas não lineares e discutir aplicações práticas em áreas como energia e meio ambiente (Kapadia; Feng; Benner, 2023; Moya; Lin, 2021).

Utilizar modelos de ordem reduzida e aprendizado ativo permite que os estudantes compreendam melhor como sistemas dinâmicos podem ser modelados com precisão e como o uso de tecnologia avançada pode otimizar simulações de sistemas não lineares complexos (Kapadia; Feng; Benner, 2023). No caso do pêndulo não linear, essas técnicas podem ser aplicadas para investigar como diferentes variáveis, como atrito e forças externas, afetam seu comportamento, oferecendo uma oportunidade para que os alunos reflitam criticamente sobre questões ambientais e energéticas.

Como descrito pelos autores citados há fortes evidencias em seus estudos da importância de integrar tecnologias digitais, metodologias pedagógicas inovadoras e a modelagem matemática no ensino de equações diferenciais para promover uma reflexão crítica sobre questões socioambientais. O pêndulo não linear emerge como um sistema ideal para viabilizar essa abordagem, permitindo que os estudantes explorem fenômenos complexos e desenvolvam competências essenciais para interpretar e transformar a realidade em que vivem.

3 METODOLOGIA

A modelagem matemática do pêndulo não linear por meio de simulações computacionais oferece oportunidade para o ensino de equações diferenciais, ao mesmo tempo em que promove uma reflexão crítica sobre questões socioambientais. Essa abordagem integradora pode enriquecer o processo de aprendizagem ao conectar o conteúdo teórico com aplicações concretas e de relevância global, proporcionando aos estudantes uma compreensão mais ampla e contextualizada.

A fim de investigar como a modelagem matemática do pêndulo não linear, utilizando equações diferenciais e simulação computacional, pode ser aplicada no ensino de equações diferenciais para promover uma reflexão crítica sobre questões socioambientais, adotou-se uma abordagem qualitativa, conforme sugerido por Bogdan e Biklen (1994). Este estudo se caracterizou como qualitativo exploratório, com o objetivo de entender como os estudantes se apropriam da modelagem e simulação do pêndulo não linear no processo de aprendizagem, conectando esses conhecimentos às questões de sustentabilidade e outras implicações socioambientais.

O estudo foi realizado com uma turma de graduação do curso de Matemática de uma instituição de ensino superior, composta por sete estudantes matriculados na disciplina de Equações Diferenciais Aplicadas I. A amostragem foi intencional, selecionando participantes que manifestaram interesse em

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

integrar a pesquisa e estavam dispostos a refletir criticamente sobre a aplicação de equações diferenciais em problemas reais. O grupo de estudantes foram subdivididos em 3 grupos disjuntos de estudantes, sendo um deles composto por 3 estudantes. A coleta de dados foi realizada a partir de múltiplas fontes, conforme descrito por Bogdan e Biklen (1994), garantindo uma visão mais abrangente do fenômeno investigado. A observação participante foi uma das principais estratégias adotadas, na qual o pesquisador, que também era o professor da disciplina, acompanhou as interações dos estudantes durante as aulas e registrou suas percepções em um diário de campo.

Entrevistas semiestruturadas foram conduzidas com os sete estudantes, aprofundando suas percepções sobre a aprendizagem da modelagem matemática e a conexão com questões socioambientais. Além disso, foram analisados documentos como relatórios e projetos desenvolvidos pelos estudantes, que evidenciavam a aplicação prática dos conceitos teóricos.

A intervenção pedagógica consistiu em atividades estruturadas em quatro etapas: 1) Introdução teórica sobre o pêndulo não linear e as equações diferenciais envolvidas, com foco na modelagem do comportamento oscilatório; 2) Modelagem matemática, em que os estudantes desenvolveram modelos próprios, utilizando as equações diferenciais para descrever o comportamento do pêndulo; 3) Simulação computacional, na qual os estudantes aplicaram ferramentas como o GeoGebra e o MATLAB para simular diferentes cenários e analisar o comportamento do pêndulo em condições não lineares; e 4) Reflexão crítica, em que os resultados das simulações foram discutidos em grupo, relacionando-os a temas socioambientais, como o uso sustentável de recursos e a análise de sistemas complexos na natureza.

Todos os procedimentos foram realizados em conformidade com as normas éticas vigentes, e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido foi assinado por todos os participantes. Garantiu-se que os estudantes tivessem liberdade para se retirar da pesquisa a qualquer momento, e todas as informações foram tratadas com confidencialidade.

Para garantir a validade e a confiabilidade dos resultados, foram utilizadas estratégias de triangulação de dados, comparando os diferentes métodos de coleta (observações, entrevistas e análise de documentos). A descrição densa dos contextos observados e o processo reflexivo do pesquisador sobre possíveis vieses também foram adotados para aumentar a confiabilidade dos achados.

Entre as limitações da pesquisa, destaca-se o fato de que a atuação do pesquisador como professor pode ter influenciado a dinâmica da sala de aula. Além disso, o tamanho da amostra e o caráter qualitativo do estudo limitam a generalização dos resultados.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

A análise dos dados seguiu o método de análise de conteúdo, conforme descrito por Bogdan e Biklen (1994). Inicialmente, foi realizada uma codificação aberta, em que os dados foram lidos e categorizados em temas emergentes, como a compreensão dos conceitos de equações diferenciais, a capacidade de conectar esses conceitos a problemas reais, e o desenvolvimento de um pensamento crítico sobre questões socioambientais. Em seguida, as categorias foram refinadas e organizadas em temas centrais, que incluíram: (i) o impacto da modelagem matemática no entendimento dos sistemas dinâmicos, (ii) a utilização das simulações computacionais como ferramenta pedagógica, e (iii) a reflexão crítica dos estudantes sobre questões ambientais e de sustentabilidade. Por fim, os temas foram analisados à luz da literatura, buscando compreender as implicações educacionais da metodologia adotada.

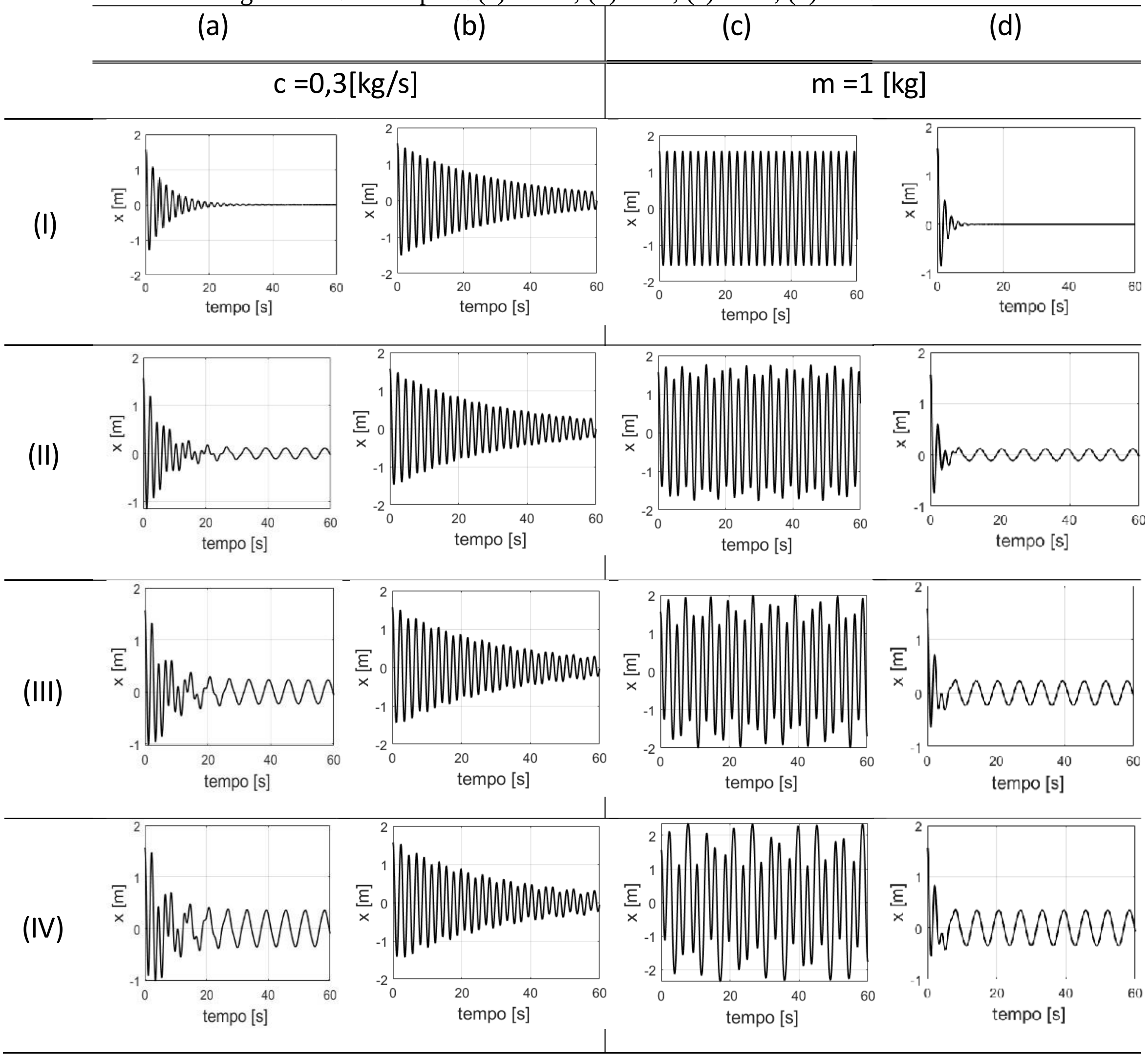
i) O impacto da modelagem matemática no entendimento dos sistemas dinâmicos

Nessa perspectiva, os grupos de alunos realizaram simulações numéricas do sistema, com parâmetros distintos. Cada grupo analisou as respostas do sistema para os diferentes valores de amplitude de excitação externa A, com a liberdade de ajustar os parâmetros de massa, amortecimento, comprimento do fio e condições iniciais. Essa abordagem permitiu que cada grupo investigasse como diferentes combinações de parâmetros influenciam o comportamento do sistema e a transição entre regimes lineares e não lineares.

Cada grupo conduziu simulações utilizando os valores de amplitude de excitação indicados (A = 0(I), 1(II), 2(III) e 3(IV) N), mas ajustando livremente os parâmetros de massa, amortecimento, comprimento do fio, e condições de contorno do sistema:

* **Grupo 1:** Os alunos desse grupo consideraram alterações nos parâmetros de amortecimento estrutural c [kg/s] e a massa m [kg] do pêndulo, analisando como esses fatores afetam a dissipação de energia e o comportamento oscilatório em diferentes regimes de excitação. Neste caso, considerou-se o comprimento do fio e condições iniciais fixos em 1 [m] e metro e as condições $\theta(0) = \pi/2$, $\dot{\theta}(0) = 1$, respectivamente, conforme apresentados na figura 2.

Figura 2 – Valores para: (a) m = 1; (b) m=5; (c) c = 0; (d) c =1.

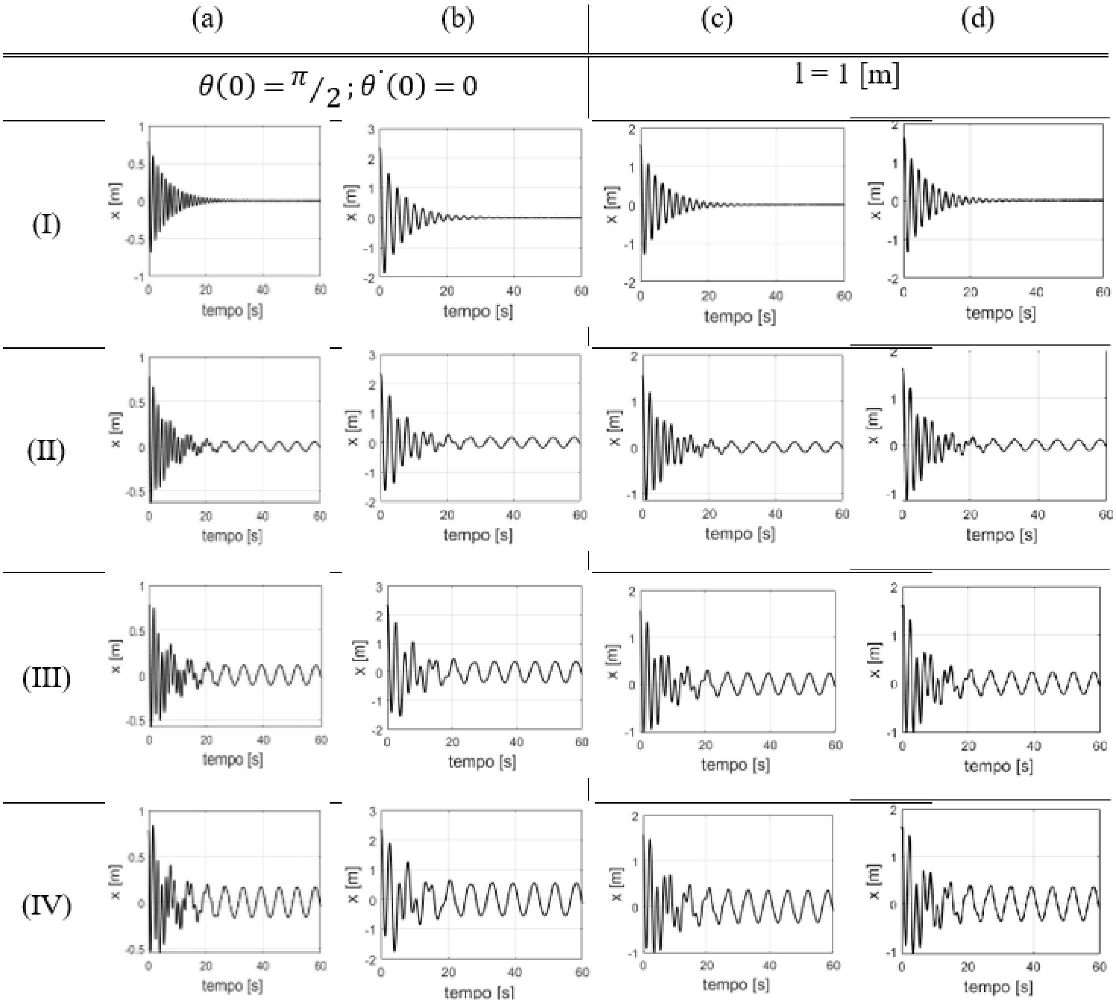


Fonte: Dados da pesquisa.

Neste cenário de simulação os discentes do grupo perceberam que no caso do sistema conservativo (I) o sistema tem um comportamento predominantemente linear independente dos parâmetros de massa e amortecimento. Considerando, amplitudes de excitação não nulas o sistema possui comportamento não linear inversamente ao crescimento do fator de massa, isto pode ser observado a partir do comparativo das respostas do sistema da Figura 2 (II-IVa) e (II-IVb) e, independente do fator de amortecimento, vide Figura 2 (II-IVa,b).

* **Grupo 2:** As considerações desse grupo focaram na variação do comprimento do fio e das condições iniciais de posição e velocidade angular, investigando a sensibilidade do sistema a pequenas alterações nas condições de partida. Neste caso considerou-se o amortecimento e massa constantes iguais ac = 0,3[kg/s] e massa m = 1 [kg], respectivamente conforme apresentados na figura 3.

Figura 3 – Valores para: (a) l=0,5; (b)l=1,5; (c)$\theta(0) = \pi/2$, $\dot{\theta}(0) = 0$; (d) $\theta(0) = \pi/2$, $\dot{\theta}(0) = 1$



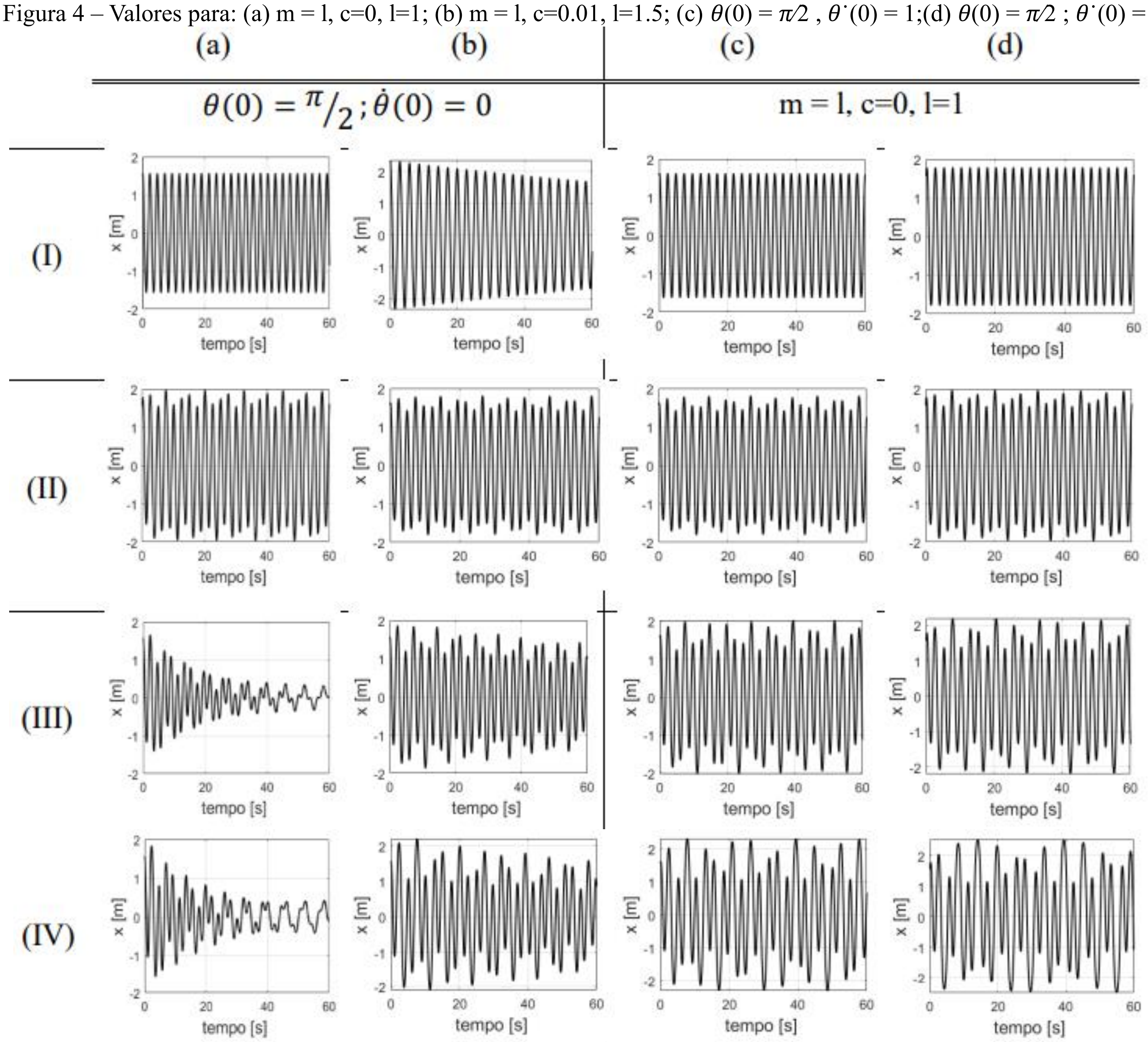
Fonte: Dados da pesquisa.

Novamente, aqui os alunos observaram que o cenário em que a excitação externa é nula, basicamente a alteração no comprimento do fio leva simplesmente a alteração no deslocamento da massa Figura 3 (Ia,b) e não sendo observado qualquer alteração quando alterado as condições iniciais, isso condiz com a teoria, pois nesse caso o cenário analisado é puramente linear. Nos cenários em que a excitação externa é não nula Figura 3 (II-IV) o parâmetros de comprimento do fio influencia diretamente efeito não linear, contudo o mesmo não é observado para as condições de contorno, isto pode ser observado se compararmos isoladamente cada cenário de amplitude de força de excitação tanto para o parâmetro de comprimento do fio (Figura 3 a,b) quanto para as condições de contorno, Figura 3 (c,d).

* **Grupo 3:** Finalmente este grupo explorou uma combinação mais ampla de parâmetros para observar como ajustes na massa, no comprimento do fio e amortecimento, combinados com diferentes condições iniciais, influenciam o padrão de oscilação, conforme apresentados na figura 4.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Figura 4 – Valores para: (a) m = l, c=0, l=1; (b) m = l, c=0.01, l=1.5; (c) $\theta(0) = \pi/2$, $\dot{\theta}(0) = 1$;(d) $\theta(0) = \pi/2$; $\dot{\theta}(0) = 2$



Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos perceberam que a partir da condição de excitação externa nula não há evidências de cenários não lineares independentemente da variação parâmetros de massa, comprimento do fio, amortecimento e condições iniciais. Todavia, é perceptível a influência direta dos parâmetros no regime de predominância não linear quando é considerada uma força de excitação externa mesmo que pequena.

Nesse sentido, os resultados das simulações numéricas permitiram que cada grupo observasse e identificasse características lineares e não lineares do sistema de pêndulo. Em geral, os alunos relataram que:

1. Para A = 0 [N]: Os cenários, em sua maioria, apresentaram comportamento linear com oscilações regulares e previsíveis. O ajuste de parâmetros como o amortecimento facilitou a

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

visualização de uma resposta proporcional e menos complexa, independentemente das condições iniciais ou do comprimento do fio.

2. Para A = 1 e A = 2 [N]: O sistema mostrou uma transição para o comportamento não linear, com oscilações que se desviavam da proporcionalidade típica dos sistemas lineares. Variações nos parâmetros resultaram em respostas mais dinâmicas e sensíveis. Os alunos observaram que a inclusão de maior amortecimento, por exemplo, não era suficiente para compensar os efeitos da excitação externa, levando a padrões de oscilação mais complexos.
3. Para A = 3 [N]: Cada grupo notou características fortemente não lineares e um comportamento caótico, onde pequenas mudanças nos parâmetros ou nas condições iniciais causaram grandes variações nas respostas. Esse cenário exigiu uma análise mais cuidadosa para identificar padrões e compreender a complexidade do sistema.

Além disso, as simulações numéricas proporcionaram uma ferramenta valiosa para a compreensão prática do comportamento do sistema, levando os alunos à conclusão de que a excitação externa oferece grande influência no efeito não linear no sistema. No entanto, os alunos enfrentaram desafios, especialmente em relação a:

- Interpretação dos Parâmetros: Muitos alunos relataram dificuldades para interpretar de forma precisa os impactos de cada parâmetro na transição entre os regimes linear e não linear, principalmente devido à quantidade de variáveis envolvidas.
- Previsão de Comportamentos: Os grupos que variaram amplamente as condições iniciais e o comprimento do fio encontraram dificuldades em prever os comportamentos do sistema sob alta amplitude de excitação (A = 3N), o que evidenciou a sensibilidade das simulações a pequenos ajustes.
- Vantagens e Desvantagens das Simulações: Embora as simulações tenham facilitado a visualização dos efeitos de diferentes parâmetros e condições iniciais, elas também apresentaram limitações. A ausência de um forte embasamento teórico dificultou a interpretação dos resultados para alguns alunos, e alguns cenários complexos exigiam uma análise extensa e aprofundada.

Diante dos relatos promovidos por grupos considerando suas especificidades de parâmetros de análise e levando em consideração, ainda, os cruzamentos da análise dos diferentes grupos, conforme os itens expostos nos itens de Interpretação dos Parâmetros, Previsão de Comportamentos e Vantagens e Desvantagens das Simulações.

Observa-se, especialmente, a vantagens da metodologia em relação às diversidades de situações impostas pelo sistema mecânico estudado. Isso permitiu que os estudantes discutissem inúmeras considerações adicionais, permitindo uma análise crítica do fenômeno e, por conseguinte, do próprio modelo matemático utilizado. Viabilizando, dessa forma, uma visão crítica da equação do modelo do sistema mecânico, vindo ao encontro das diretrizes de uma aprendizagem de matemática crítica, segundo Skovsmose (2001).

Com o intuito de fornecer subsídios aos alunos para conclusões gerais e o fechamento das interpretações parciais de cada grupo sobre o conteúdo de equações diferenciais, foi solicitado a todos os discentes da disciplina que realizassem uma simulação com parâmetros específicos, cujos resultados estão ilustrados na Figura 5.

Desse modo, a Figura 5apresenta a resposta do sistema de pêndulo ilustrado na Figura 1 sob diferentes amplitudes de excitação externa (A = 0 [N], A = 1 [N], A = 2 [N], A = 3 [N]) visando explorar cenários do comportamento linear e não linear do sistema ao longo do tempo. Essa análise oferece um contexto rico para o ensino de equações diferenciais não lineares e o estudo de sistemas dinâmicos complexos, além de abrir espaço para uma reflexão crítica.

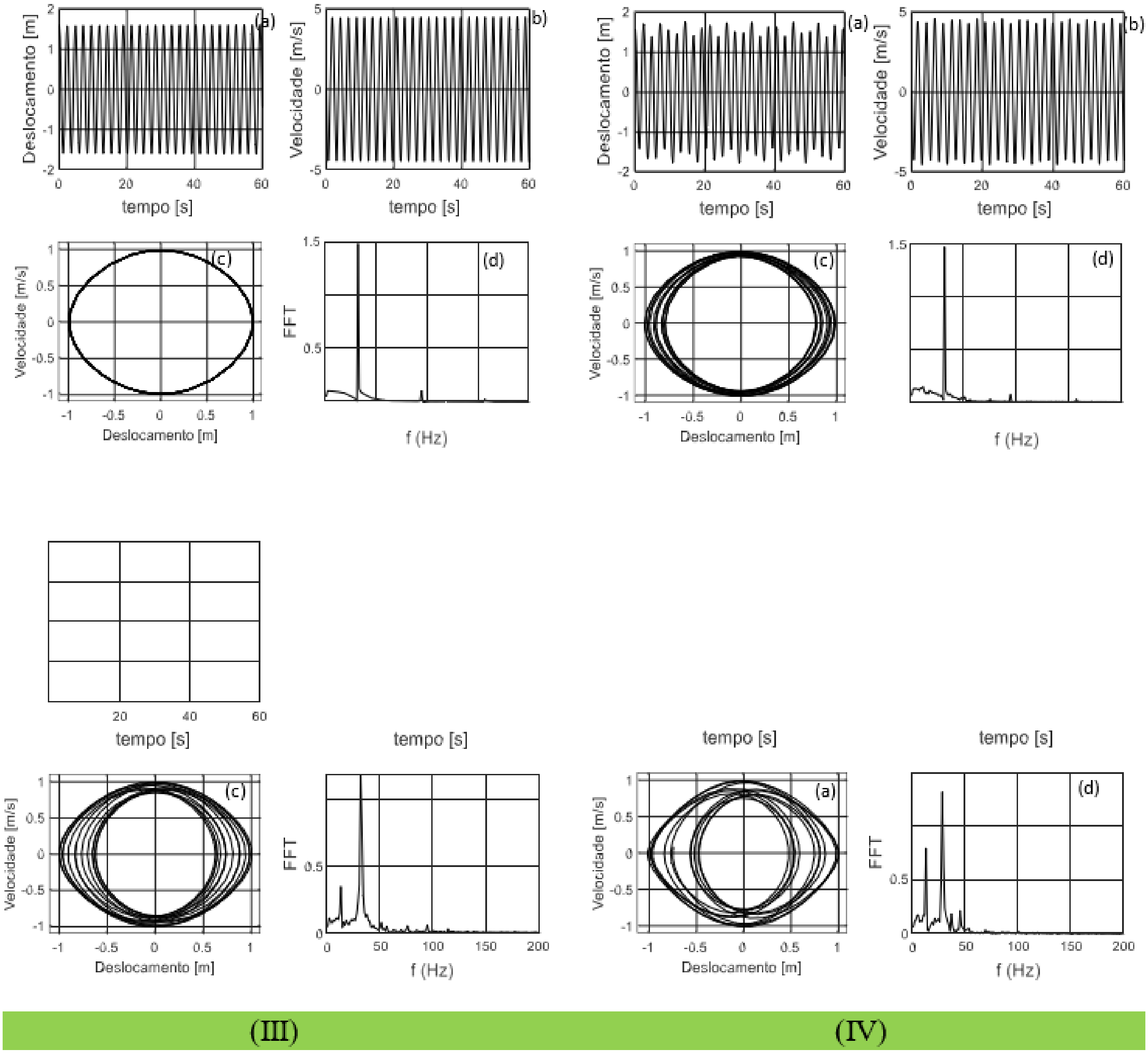
Nesse contexto, a figura 5 exibe os resultados simulados a partir da equação do movimento (1), considerando um objeto de massa m=1 [kg], coeficiente de amortecimento c=0 [kg/s] e, comprimento do fio l=1 [m], considerando diferentes amplitudes para a força de excitação externa $\varphi(t) = Asen(wt)$com as condições de contorno $\theta(0) = \pi \ e \ \theta^{\cdot}(0) = 0$.

ii) A utilização das simulações computacionais como ferramenta pedagógica

A Figura 5 (a), (b), (c) e (d) ilustram, respectivamente, as respostas em termos de deslocamento e velocidade em função do tempo; a relação entre deslocamento-velocidade e, transformada de Fourier (FFT) para os quatro níveis de excitação mencionados. Esses gráficos são essenciais no estudo de sistemas não lineares, uma vez que mostram como a variação da amplitude de excitação externa modifica o comportamento do sistema ao longo do tempo.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Figura 5: Amplitude de excitação externa (I) A = 0 [N]; (II) A = 1 [N]; (III) A = 2 [N]; (IV) A = 3 [N].



Fonte: Dados da pesquisa.

Essas considerações paramétricas são necessárias para que o sistema proporcionasse diferentes cenários de comportamento, desde linear até não linear. Nesse sentido, buscamos ilustrar a transição da do cenário linear puro até o cenário não linear. As respostas obtidas nas simulações consideraram a condição de amortecimento estrutural nulo.

A Figura 5 apresenta os resultados para diferentes valores de amplitude de excitação externa, incluindo: (a) Deslocamento; (b) Velocidades; (c) Diagrama de causa e efeito; e (d) FFT do deslocamento. Com base nos itens I a-d, observa-se a validação do modelo definido pela equação de movimento (1) e implementado por meio de método numérico. Já nos itens I- IV d, é possível notar a evolução do comportamento não linear evidenciada pela perturbação no gráfico FFT.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Diante disso é possível analisar as diferenças entre os gráficos para facilitar a compreensão dos conceitos. Nesse sentido, convém mencionar:

- ✓ **Gráfico (a)**: Apresenta a excitação externa nula (A = 0 [N]). Neste cenário, o sistema está em repouso ou apresenta pequenas oscilações naturais, evidenciando que, sem uma força externa aplicada, o sistema se mantém próximo de um estado de equilíbrio estático. Este gráfico é útil para introduzir o conceito de comportamento linear em sistemas dinâmicos simples;
- ✓ **Gráfico (b)**: Com uma excitação de A = 1 [N], nota-se o início de oscilações mais acentuadas, mas ainda em um regime controlado. Aqui, a não linearidade do sistema começa a se manifestar, com respostas mais complexas e deslocamentos maiores em comparação ao gráfico (a). Este é um ponto interessante para discutir como sistemas não lineares podem reagir de forma desproporcional a pequenos aumentos de força externa;
- ✓ **Gráfico (c)**: Com A = 2 [N], o comportamento do sistema torna-se ainda mais dinâmico, com maiores amplitudes de deslocamento e variações na velocidade. Neste gráfico, é possível perceber a transição para um comportamento mais caótico, com maior dependência das condições iniciais. Esse gráfico serve para ilustrar fenômenos de ressonância e instabilidade, aspectos críticos no estudo de equações diferenciais não lineares;
- ✓ **Gráfico (d)**: Sob uma excitação máxima de A = 3 [N], o sistema apresenta um comportamento totalmente não linear, com oscilações de grande amplitude e sinais de ressonância significativos. Aqui, os estudantes podem observar como a não linearidade pode levar a respostas imprevisíveis e a bifurcações, fenômenos tipicamente estudados em sistemas dinâmicos complexos.

A comparação entre os gráficos (a), (b), (c) e (d) permitiu aos discentes entenderem como as equações diferenciais não lineares modelam sistemas cujas respostas variam de forma não proporcional às forças externas. Isso também reforça a importância de simular e visualizar o comportamento de sistemas dinâmicos complexos.

Desse modo, a utilização de métodos computacionais avançados, como redes neurais informadas por física e modelos substitutos baseados em aprendizado ativo, amplia as possibilidades de simulação de sistemas não lineares complexos no contexto educacional (Kapadia; Feng; Benner, 2023; Moya; Lin, 2021). Essas técnicas permitem que os estudantes explorem de forma mais aprofundada o comportamento do pêndulo não linear, compreendendo a sensibilidade a variações paramétricas e refletindo sobre as implicações socioambientais desses sistemas. A matemática em ação, neste caso, se revela na aplicação de técnicas avançadas para resolver problemas complexos que têm impacto direto na sociedade.

iii) Reflexão crítica dos estudantes sobre questões ambientais e de sustentabilidade

Sob a perspectiva das teorias de Freire (1996) e Skovsmose (2007), a modelagem matemática do pêndulo não linear pode ser utilizada como ferramenta pedagógica para promover reflexões críticas sobre questões socioambientais no ensino de equações diferenciais. Skovsmose (2007) introduz o conceito de “matemática em ação”, destacando que a matemática não é apenas uma representação da realidade, mas também um agente que molda e influencia práticas sociais e decisões políticas.

A análise de sistemas não lineares, como o pêndulo não linear, permite explorar fenômenos complexos que possuem analogias diretas com questões ambientais atuais. Por exemplo, o comportamento sensível a condições iniciais e a imprevisibilidade inerente a esses sistemas podem ser comparados aos efeitos das mudanças climáticas, onde pequenas alterações em fatores ambientais podem levar a consequências significativas, como eventos climáticos extremos (Meyer; Lima, 2023). Nesse contexto, a matemática atua como uma ferramenta de compreensão e um meio de ação e intervenção nas problemáticas socioambientais.

A utilização de modelos matemáticos aplicados a problemas do cotidiano facilita a conexão entre os conceitos matemáticos e as experiências de vida dos estudantes. Khotimah e Masduki (2016) destacam que a “Aprendizagem Contextual” permite que os alunos relacionem problemas matemáticos a situações reais, promovendo uma compreensão mais profunda e crítica do conhecimento. Ao modelar o pêndulo não linear, os estudantes podem investigar como variáveis como atrito, forças externas e amplitude de excitação influenciam o comportamento do sistema, estabelecendo paralelos com o acúmulo de gases de efeito estufa e seus impactos no clima global. Assim, conforme aponta Skovsmose (2007), a matemática em ação permite que os estudantes percebam a influência da matemática nas decisões que afetam a sociedade e o meio ambiente.

A integração de tecnologias digitais e simulações computacionais enriquece o ensino de equações diferenciais e modelagem matemática, proporcionando ambientes de aprendizagem interativos que promovem a participação ativa dos estudantes. Cevikbas, Greefrath e Siller (2023) argumentam que o uso de tecnologias digitais facilita a experimentação e o refinamento de modelos, aprofundando a compreensão por meio da exploração e manipulação direta dos sistemas estudados. Ferramentas como o GeoGebra permitem a exploração de múltiplas representações e equilibram as abordagens analítica, gráfica e numérica, facilitando a compreensão dos fenômenos não lineares (Igliori; Almeida, 2017). Neste sentido, a matemática em ação se materializa através da utilização de

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

tecnologias que permitem a simulação e a visualização de fenômenos complexos, tornando o aprendizado mais significativo.

A abordagem da "Aprendizagem Baseada em Problemas" coloca os estudantes como agentes ativos em seu processo de aprendizado, utilizando problemas reais como ponto de partida (Santos et al., 2020). Ao enfrentar desafios relacionados à modelagem do pêndulo não linear e suas implicações socioambientais, os alunos desenvolvem autonomia e pensamento reflexivo, alinhando-se aos princípios da educação matemática crítica defendidos por Freire (1996) e à ideia de Skovsmose (2007) de que a matemática deve capacitar os estudantes a participarem ativamente na sociedade.

A modelagem matemática em contextos socioambientais também promove o desenvolvimento do pensamento crítico e reflexivo dos estudantes. Armutcu e Bal (2023) destacam que a utilização de atividades de modelagem matemática no contexto STEM aumenta significativamente as habilidades dos alunos, incentivando a resolução de problemas complexos e a colaboração.

Ao aplicar esses conceitos a questões como o planejamento sustentável de recursos energéticos, os estudantes são estimulados a considerar o comportamento imprevisível dos sistemas e a refletir sobre soluções viáveis para problemas globais. Dessa forma, a matemática em ação se manifesta na capacidade dos estudantes de utilizarem conhecimentos matemáticos para influenciar e compreender decisões que têm impacto social e ambiental.

Entretanto, é fundamental que a integração de tecnologias digitais seja acompanhada de estratégias pedagógicas que evitem a dependência excessiva de soluções automáticas, promovendo a compreensão dos princípios matemáticos subjacentes. Andresen (2023) alerta para a ameaça da "caixa preta", onde os estudantes confiam cegamente nas soluções geradas pelas ferramentas, o que pode limitar o aprendizado efetivo. Abordagens que incentivam a investigação e a exploração independente dos problemas podem mitigar esse risco (Greubel et al., 2022). Neste contexto, Skovsmose (2007) enfatiza a importância de desenvolver uma postura crítica em relação ao uso da matemática, reconhecendo seu papel ativo na modelagem e transformação da realidade.

A formação de professores desempenha um papel crucial na implementação eficaz dessas abordagens. Vitoria et al. (2021) ressaltam que estratégias de formação que considerem as especificidades dos estudantes e suas dificuldades com o tema são essenciais para promover uma educação matemática crítica e transformadora. Balseca et al. (2023) complementam que a capacitação docente é fundamental para integrar com sucesso a modelagem matemática e as tecnologias digitais no currículo. Alinhado a isso, Skovsmose (2007) argumenta que os educadores devem estar cientes do poder da matemática em ação e serem capazes de orientar os estudantes na compreensão crítica de como a matemática influencia e é influenciada por contextos sociais e tecnológicos.

Entendemos que a modelagem matemática do pêndulo não linear, utilizando equações diferenciais e simulação computacional, apresenta-se como uma abordagem eficaz para promover uma reflexão crítica sobre questões socioambientais no ensino de equações diferenciais. Ao conectar os conceitos matemáticos a contextos reais e atuais, os estudantes desenvolvem competências matemáticas, e, também uma consciência crítica sobre os desafios ambientais que permeiam a sociedade contemporânea. Conforme Skovsmose (2007) enfatiza, a matemática em ação é uma forma de capacitar os estudantes a entenderem e intervirem no mundo, reconhecendo o papel da matemática na construção e na transformação da realidade social e ambiental.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo evidenciou que a modelagem matemática do pêndulo não linear, utilizando equações diferenciais e simulações computacionais, pode ser uma abordagem eficaz para o ensino de equações diferenciais ao promover uma reflexão crítica sobre questões socioambientais. A integração entre teoria e prática permite que os estudantes compreendam conceitos matemáticos avançados a partir da relevância deles em contextos reais, alinhando-se aos princípios da Educação Matemática Crítica.

Ao analisar os diferentes comportamentos dinâmicos gerados por variações na amplitude da excitação externa – desde oscilações regulares até padrões caóticos – os estudantes puderam vivenciar na prática as características centrais de sistemas não lineares. A simulação computacional desempenhou um papel crucial nesse processo, proporcionando visualizações concretas que facilitaram a compreensão de fenômenos complexos e a identificação de padrões emergentes.

Sob a perspectiva das teorias de Freire (1996) e Skovsmose (2007), especialmente o conceito de “matemática em ação”, a atividade permite que os estudantes percebam a matemática não apenas como um conjunto de técnicas abstratas, mas como uma ferramenta ativa que influencia e é influenciada por contextos sociais e ambientais. Ao estabelecer paralelos entre o comportamento do pêndulo não linear e fenômenos como as mudanças climáticas, os estudantes são incentivados a refletir criticamente sobre o impacto de pequenas variações em sistemas complexos e a importância de ações sustentáveis.

A experiência revelou que a combinação entre simulação computacional e Educação Matemática Crítica cria um ambiente de aprendizagem dinâmico e engajador. Os estudantes se tornaram agentes ativos em seu processo educacional, desenvolvendo autonomia, pensamento reflexivo e a capacidade de conectar conceitos matemáticos a questões reais. Isso está em consonância com a ideia de Skovsmose (2007) de que a matemática deve capacitar os indivíduos a participarem criticamente da sociedade, compreendendo e intervindo nos processos que moldam a realidade.

Entretanto, o estudo também apontou para a necessidade de cautela na integração de tecnologias digitais. Conforme alertado por Andresen (2023), é fundamental evitar a dependência excessiva de soluções automáticas e garantir que os estudantes compreendam os princípios matemáticos subjacentes. Estratégias pedagógicas que promovam a investigação e a exploração independente mostraram-se essenciais para desenvolver uma postura crítica em relação ao uso da matemática e da tecnologia.

Conclui-se que a modelagem matemática do pêndulo não linear, apoiada por simulações computacionais e fundamentada na Educação Matemática Crítica, não só enriquece o ensino de equações diferenciais como também promove a formação de cidadãos críticos e conscientes. Ao conectar a matemática a contextos socioambientais relevantes, os estudantes são encorajados a utilizar o conhecimento matemático como ferramenta para compreender e transformar a realidade, contribuindo para o desenvolvimento sustentável e a justiça social.

Para futuras iniciativas, recomenda-se a expansão desta abordagem para outros sistemas dinâmicos não lineares e a inclusão de projetos interdisciplinares que abordem questões socioambientais emergentes. Além disso, a formação contínua de professores em práticas de Educação Matemática Crítica e no uso eficaz de tecnologias digitais é essencial para a implementação bem-sucedida dessa metodologia, conforme enfatizado por Vitoria et al. (2021) e Balseca et al. (2023).

Este trabalho reforça a importância de uma educação matemática que transcenda o aprendizado técnico, promovendo a reflexão crítica e a participação ativa dos estudantes na sociedade. A matemática em ação, conforme concebida por Skovsmose (2007) revela-se uma poderosa abordagem para capacitar os estudantes a compreenderem profundamente os desafios contemporâneos e a atuarem de forma consciente na construção de um mundo mais justo e sustentável.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão das bolsas no âmbito do Programa de Residência Pedagógica, que possibilitaram o desenvolvimento deste trabalho, contribuindo significativamente para a formação inicial de professores e o fortalecimento das práticas pedagógicas, bem como os recursos financeiros disponibilizados pelo Programa Próprio de Fomento à Pesquisa, Pós- Graduação e Inovação da Universidade Estadual de Goiás/Plataforma Institucional de Pesquisa e Inovação em Bioinsumos, por meio do Termo de Fomento nº 54/2023 – UEG; processo nº 202200020023145.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

REFERÊNCIAS

ANDRESEN, Mette Susanne. The influence of ready-made tools on students' learning by modelling with differential equations systems. Frontiers in Education, v. 8, p. 1141019, 2023. Disponível em: https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1141019. Acesso em: 19 dez. 2024.

ARANGO, Carlos A. Non-intuitive dependence of oscillation time on damping in a nonlinear pendulum. The Physics Teacher, v. 59, n. 2, p. 116-118, 2021.

ARMUTCU, Yaprak; BAL, Ayten Pınar. The effect of mathematical modelling activities on students' mathematical modelling skills in the context of STEM education. International Journal of Contemporary Educational Research, v. 10, n. 1, p. 42-55, 2023. Disponível em: https://doi.org/10.33200/ijcer.1131928. Acesso em: 19 dez. 2024.

ARFINANTI, Nurul. Bahan ajar persamaan diferensial berbasis higher order thinking skills. Jurnal Analisa, v. 6, n. 1, p. 10-18, 2020.

BALSECA, Cristian Luis Inca; MAJI, Franklin Marcelo Coronel; MARCELO, Caicedo Romero Hugo; BALSECA, Evelyn Geovanna Inca; ORELLANA, Julio Cesar Morocho; GODOY, Lizeth Fernanda Silva. Differential equations and mathematical models: an educational approach. Journal of Namibian Studies, v. 33, S2, p. 2336–2348, 2023. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s11858-022-01447-2. Acesso em: 19 dez. 2024.

BIBI, Aisha et al. An evolving research to tackle teaching and learning challenges during differential equations course: A combination of non-routine problems and teacher training. International Electronic Journal of Mathematics Education, v. 14, n. 3, p. 647-656, 2019.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari Knopp. Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

CEVIKBAS, Mustafa; GREEFRATH, Gilbert; SILLER, Hans-Stefan. Advantages and challenges of using digital technologies in mathematical modelling education – a descriptive systematic literature review. Frontiers in Education, v. 8, p. 1142556, 2023. Disponível em: https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1142556. Acesso em: 4 nov. 2024.

FREIRE, Paulo. Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa. Coleção Leitura. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GRANDGENETT, Neal; OSTLER, Elliott; ZYGIELBAUM, Arthur I.; HENNINGER, Scott; HAZZARD, Char. Mathematical modeling within a technology based learning environment: some principles for adaptive instruction. In: Proceedings of the Mathematics, Science, Education and Technology Conference, San Diego, CA, 2 fev. 2000. Disponível em: https://digitalcommons.unomaha.edu/tedfacproc/14.

GREUBEL, André; SILLER, Hans-Stefan; RUZIKA, Stefan; KNIPPERTZ, Lynn. Teaching mathematical modeling with computing technology: presentation of a course based on evacuations. In: Proceedings of the 17th Workshop in Primary and Secondary Computing Education (WiPSCE '22), Morschach, Switzerland, 31 out.-2 nov. 2022. New York, NY, USA: ACM, 2022. Disponível em: https://doi.org/10.1145/3556787.3556802.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo; ALMEIDA, Marcio Vieira de. Aplicações para o Ensino de Equações Diferenciais. Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 10, n. 1, p. 257-270, maio 2017.

JIA, Rongguang et al. Nonlinear coupling in an asymmetric pendulum attached to a vibrating elastic rod. Nonlinear Dynamics, v. 99, n. 3, p. 2125-2139, 2020.

KAPADIA, Harshit; FENG, Lihong; BENNER, Peter. Active-learning-driven surrogate modeling for efficient simulation of parametric nonlinear systems. Preprint, arXiv:2306.06174v1, 9 jun. 2023. Disponível em: http://arxiv.org/abs/2306.06174.

KHOTIMAH, Rita Pramujiyanti; MASDUKI. Improving Teaching Quality and Problem Solving Ability Through Contextual Teaching and Learning in Differential Equations: A Lesson Study Approach. Journal of Research and Advances in Mathematics Education, v. 1, n. 1, p. 1-13, 2016.

KUNDU, Sagarlata; CHATTERJEE, Tanmoy. Synthesis of non-linear feedback and oscillation control in mechanical systems. International Journal of Dynamics and Control, v. 10, n. 2, p. 755-767, 2022.

LABETOULLE, Benjamin; SAVADKOOHI, Seyed; GOURDON, Emmanuel. Detecting different dynamics in two coupled oscillators with a time-dependent cubic nonlinearity. Nonlinear Dynamics, v. 109, n. 2, p. 1107-1123, 2022.

LEITHOLD, Louis. O cálculo com geometria analítica: volume 2. Rio de Janeiro: Editora HARBRA Ltda, 1994.

LITAK, Grzegorz; BOROWIEC, Marek; DĄBEK, Krzysztof. The transition to chaos of pendulum systems. Applied Sciences, v. 12, n. 17, p. 8876, 2022.

MEYER, J. F. C. A.; LIMA, M. Relevant mathematical modelling efforts for understanding COVID-19 dynamics: an educational challenge. ZDM – Mathematics Education, v. 55, p. 49–63, 2023. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s11858-022-01447-2.

MOYA, Christian; LIN, Guang. DAE-PINN: A Physics-Informed Neural Network Model for Simulating Differential Algebraic Equations with Application to Power Networks. arXiv preprint, arXiv:2109.04304, 2021. Disponível em: http://arxiv.org/abs/2109.04304.

OCHKOV, Valery et al. Oscillations in Nonlinear Systems with Elastic Links. Mathematics, v. 11, n. 7, p. 1621, 2023.

RAHIMI DOLATABAD, Mohammad et al. Analytical and experimental analyses of nonlinear vibrations in a rotating inverted pendulum. Mechanical Systems and Signal Processing, v. 171, 2022.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

ROGOVCHENKO, Yuriy; ROGOVCHENKO, Svitlana. Promoting Conceptual Understanding of Differential Equations Through Inquiry Tasks. Proceedings of the 50th Annual Conference on Fostering Engineering Education Research & Mathematics, 2022.

SANTOS, Leandro Brito et al. Teaching of Ordinary Differential Equations Using the Assumptions of the PBL Method. International Journal of Engineering Pedagogy, v. 10, n. 3, p. 7-20, 2020.

SAVI, Marcelo Amorim. Dinâmica não-linear e caos. Editora E-papers, 2006.

SKOVSMOSE, O. Educação Matemática crítica: a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001. Coleção Perspectivas em Educação Matemática, SBEM, 160 p.

SKOVSMOSE, O. Educação crítica: incerteza, matemática, responsabilidade. Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Cortez, 2007.

SPILSBURY, Michael Joel; EUCEDA, Armando. Transformada rápida de Fourier. Revista de la Escuela de Física, v. 4, n. 2, p. 45-52, 2016.

VITORIA, L.; RAMLI, Marwan; JOHAR, R.; MAWARPURY, M. A review of mathematical modelling in educational research in Indonesia. Journal of Physics: Conference Series, v. 1882, p. 012145, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1882/1/012145.

ZHAO, Shufen. On The Teaching Innovation of The Differential Equation Course for Engineering Students. Journal of Advances in Mathematics, v. 21, p. 35-37, 2022.