Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

DETERMINAÇÃO DE TERMOS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI ATRAVÉS DE DOIS ALGORITMOS COMPUTACIONAIS

https://doi.org/10.56238/arev6n4-033

Data de submissão: 04/11/2024 **Data de publicação:** 04/12/2024

Alan Derick de Araújo Lima
Mestre em Matemática
Universidade Estadual do Ceará (UECE)
Caucaia, Ceará, Brasil
E-mail: alanderickalima@gmail.com

Alberton Fagno Albino do Vale
Mestre em Matemática
UFERSA
Mossoró, Rio Grande do Norte, Brasil
E-mail: fagnoalbino@gmail.com

Elias das Neves Freire
Doutor em Economia
IFRN- campus Mossoró/ Universidade do Estado do Rio Grande do Norte - UERN
Mossoró, Rio Grande do Norte, Brasil
E-mail: eliasnef@yahoo.com.br

Lucas Emanuel de Oliveira Maia
Mestre em Ensino de Ciências e Matemática
Universidade Federal do Ceará (UFC)
Icapui, Ceará, Brasil
E-mail: lucas.manibu@hotmail.com

Rildo Alves do Nascimento
Especialista em Metodologia do Ensino da Matemática
Instituto Superior de Teologia Aplicada - INTA
Santa Maria da Boa Vista, Pernambuco, Brasil
E-mail: rildo.alves23@gmail.com

Carlos Henrique Lima de Moura
Mestre em Matemática
Universidade Federal do Ceará (UFC)
Caucaia, Ceará, Brasil
E-mail: enrico@ifce.edu.br

Adriano Socorro de Souza Vaz
Mestre em Ciências da Educação
Universidade Metropolitana de Santos - Unimes
Macapá, Amapá, Brasil
E-mail: adrianossvaz100478@gmail.com

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Isaías José de Lima
Mestre em Matemática
Universidade Federal do Ceará (UFC)
Serra Talhada, Pernambuco, Brasil
E-mail: isaiaslima003@gmail.com

Juscimária de Sousa Silva
Esp. Finanças e Matemática
FAVENI: Faculdade Venda Nova do Imigrante
Uruçuí, Piauí, Brasil
E-mail: juscimariasousa@gmail.com

Cleydiel Edmar da Silva
Mestre em Matemática
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI
Picos, Piauí, Brasil
E-mail: cleydielsilvajc@gmail.com

Francisco José dos Santos
Mestre em Matemática
Universidade Estadual Paulista - UNESP
Oeiras, Piauí, Brasil
E-mail: francisco.jose-santos@unesp.br

William Figueredo Cruz
Mestrando em Engenharia de Materiais e Processos Industriais
Instituto Federal do Piauí - IFPI - Central
Oeiras, Piauí, Brasil
E-mail: william.figueredo-cruz@unesp.br

Anderson Amaro Vieira
Doutorando em Educação
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
Parauapebas, Pará, Brasil
E-mail: anderson.avieira2020@gmail.com

Iliane Maria Pimenta Rodrigues
Mestra em Educação
Universidade Federal do Ceará (UFC)
Caucaia, Ceará, Brasil
E-mail: iliane.pimenta16@gmail.com

Paulo Robson Paiva Soares
Mestre em Matemática
Universidade Estadual do Piauí (UESPI)
Ipu, Ceará, Brasil
E-mail: paulo.soares1@prof.ce.gov.br

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

RESUMO
A sequência de Fibonacci surgiu a partir do seguinte problema: Um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado. Determine quantos casais de coelho terão após um ano, supondo que, a cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que cada casal começa a procriar dois meses após o seu nascimento. A partir desse problema foi construída a sequência de Fibonacci que conhecemos. Quando vamos construindo a sequência verificamos que o número de coelhos aumenta muito com o tempo. Dessa forma, fica trabalhoso calcular a quantidade de coelhos quando for aumentando o número de meses. Daí, surge a seguinte pergunta: quantos coelhos terão após n meses? Para isso, serão construídos dois algoritmos computacionais no VisuAlg: um algoritmo para determinar os n primeiros termos da sequência de Fibonacci e outro para determinar o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci utilizando a fórmula de Binet. O objetivo geral do trabalho é apresentar um algoritmo computacional para determinar os n primeiros termos da sequência. Os objetivos específicos do trabalho são: apresentar o problema motivador da sequência de Fibonacci; exibir a sequência de Fibonacci como uma recorrência e estabelecer uma fórmula para determinar os termos de tal sequência. Primeiramente, foi feita uma pesquisa bibliográfica que teve como fonte os livros de Hefez (2016), Alencar (1981) e Burton (2010) e o artigo de Silva (2020). Depois, foram construídos os algoritmos computacionais em VisuAlg. Por fim, foram feitas algumas considerações, mostrando, de forma breve, as dificuldades enfrentadas na pesquisa e uma reflexão sobre a metodologia empregada.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci. Recorrências. Algoritmos Computacionais.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

1 INTRODUÇÃO

Sequência de Fibonacci é um assunto da teoria dos números e teoria dos números é um tema muito belo da matemática. Além disso, a sequência de Fibonacci tem várias aplicações. Por fim, saber uma fórmula para determinar o n-ésimo termo da sequência e ter um algoritmo computacional para determinar os n primeiros termos da sequência torna mais prático o estudo e a aplicação do tema.

Leonardo de Pisa, filho de Bonacci, daí o apelido Fibonacci, foi um matemático italiano muito importante para o mundo ocidental. Em 1202, publicou o livro Liber Abaci, que possuía todo o conhecimento sobre números e álgebra da época. Essa obra foi responsável por introduzir na Europa o sistema de numeração indo-arábico e consequentemente pelo desenvolvimento da álgebra e da aritmética no ocidente. (HEFEZ, 2016)

Fibonacci propôs e resolveu o seguinte problema: Um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado. Determinar quantos casais de coelhos terão após um ano, supondo que, cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que um casal começa a procriar dois meses após o seu nascimento.

A partir desse problema foi construída a sequência de Fibonacci que conhecemos. Observamos que o número de coelhos aumenta muito com o tempo**.** Consequentemente fica trabalhoso calcular a quantidade de coelhos quando for aumentando o número de meses. Daí surge a necessidade de saber: quantos coelhos terão após n meses?

Para isso, será apresentada uma fórmula para determinar a quantidade de coelhos após n meses e será desenvolvido um algoritmo computacional para determinar os n primeiros termos da sequência de Fibonacci.

Os objetivos do presente trabalho são:

- Objetivo geral: Apresentar um algoritmo computacional para determinar os n primeiros termos da sequência de Fibonacci.
- Objetivos específicos: Apresentar o problema motivador da sequência de Fibonacci, exibir a sequência de Fibonacci como uma recorrência e estabelecer uma fórmula para determinar os termos da sequência de Fibonacci.

A pesquisa deste trabalho foi bibliográfica. A pesquisa bibliográfica teve como fonte livros e artigo. Os livros-texto que foram utilizados são: Burton (2010), Hefez (2016), Iezzi (2013) e Mathias (2017). O artigo que foi utilizado é: Silva (2020).

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

2 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Trataremos, inicialmente, de alguns resultados fundamentais para a compreensão e desenvolvimento de assuntos posteriormente abordados.

Definição: Chama-se sequência finita toda função f do conjunto $N_n^{*} \longrightarrow R$, em que $N_n^{*} = \{1,2,3, \dots, n\}$. (IEZZI, 2013)

Exemplo: A sequência dos divisores inteiros positivos de 60.

$$D(60) = (1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60).$$

Definição: Chama-se sequência infinita toda função f do conjunto $N^{*} \longrightarrow R$, em que $N^{*} = \{1,2,3, \dots\}$. (IEZZI, 2013)

Exemplo: A sequência dos números primos positivos.

$$P = (2,3,5,7,11,13,17,19, \dots).$$

Definição: Chama-se recorrência uma sequência em que são dadas duas regras: a primeira para identificar o primeiro termo (ou mais termos) e outra para calcular cada termo a partir do anterior (ou anteriores). (IEZZI, 2013)

Exemplo: A sequência dos números ímpares pode ser definida pela recorrência:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + 2 \end{cases}$$

Em que $n \geq 1$.

$$I = (1,3,5,7,9,11,13,15, \dots).$$

O matemático italiano Fibonacci propôs o seguinte problema: Um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado. Determinar quantos casais de coelhos terão após um ano, supondo que, cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que um casal começa a procriar dois meses após o seu nascimento. (HEFEZ, 2016)

A tabela a seguir mostra a quantidade de coelhos em cada mês:

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Tabela 01: Número de casais de coelhos em cada mês.

Mês	Número de casais do mês anterior	Número de casais recém-nascidos	total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Fonte: Elaborado pelos autores.

Essa foi a solução dada por Fibonacci. A partir desse problema surgiu a seguinte definição:

Definição**:** A sequência de inteiros positivos onde $F_1 = F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para todo $n > 2, n \in N$, recebe o nome de sequência de Fibonacci. (SILVA, 2020)

Portanto, obtemos os termos da sequência de Fibonacci utilizando a recorrência acima. A seguir encontramos os 12 primeiros termos da sequência de Fibonacci utilizando essa definição.

$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$
$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$
$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$
$$F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8$$
$$F_7 = F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13$$
$$F_8 = F_7 + F_6 = 13 + 8 = 21$$
$$F_9 = F_8 + F_7 = 21 + 13 = 34$$
$$F_{10} = F_9 + F_8 = 34 + 21 = 55$$
$$F_{11} = F_{10} + F_9 = 55 + 34 = 89$$
$$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 89 + 55 = 144$$

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Dessa forma, os 12 primeiros termos da sequência de Fibonacci são os números:

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144$$

Em 1843, um matemático francês Jacques-Philippe-Marie Binet descobriu uma fórmula para a sequência de Fibonacci. A fórmula é a seguinte: (BURTON, 2010)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Utilizando essa fórmula, determinaremos o primeiro termo da sequência de Fibonacci.

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right]$$

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$F_1 = 1$$

Conforme o expoente for aumentando fica inviável utilizar a fórmula de Binet. Por isso, será construído um algoritmo computacional, em Visualg, para determinar o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci.

3 INTRODUÇÃO AO VISUALG

É uma demanda crescente o conhecimento matemático e computacional na sociedade atual. Por isso, se faz necessário que o bacharel em matemática esteja mais preparado para utilizar algumas ferramentas computacionais em seu trabalho. Principalmente, ferramentas computacionais para algoritmos que solucionem problemas da matemática pura e aplicada.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Devemos saber que a máquina (computador) não é inteligente. O mesmo precisa de instruções para executar o que queremos. A diferença entre o ser humano e a máquina é que o computador executa algoritmos numa velocidade muito superior ao ser humano.

Mas o que seria algoritmo? De acordo com MATHIAS (2017), algoritmo é a especificação de uma sequência lógica ordenada de passos que deve ser seguida para realização de uma tarefa garantindo a sua repetitividade. Portanto, algoritmo é um conjunto de passos para se resolver um determinado problema.

Visualg é um aplicativo utilizado por estudantes de Algoritmo e Lógica de Programação. O visual é baseado no Portugol (um pseudocódigo escrito em português). Foi desenvolvido por Antonio Carlos Nicolodi em parceria com Claúdio Morgado de Souza. Tudo começou em 1996 quando Claudio Morgado havia criado Visualg Algoritmo para um curso de graduação. Claúdio Morgado passou os código fonte para Nicolodi da versão 2.0 do programa, para que fosse aprimorada. Depois de um tempo Morgado precisou sair do projeto e pediu que Nicolodi continuasse no desenvolvimento e aperfeiçoamento do aplicativo.

Em 2014, foi lançada a versão 3.0 do aplicativo. O sucesso foi tão grande que a versão 3.0 do aplicativo Visualg já tem mais de 30 milhões de downloads em mais de 95 países e é utilizada por mais de 50 mil escolas como ferramenta de ensino/aprendizagem.

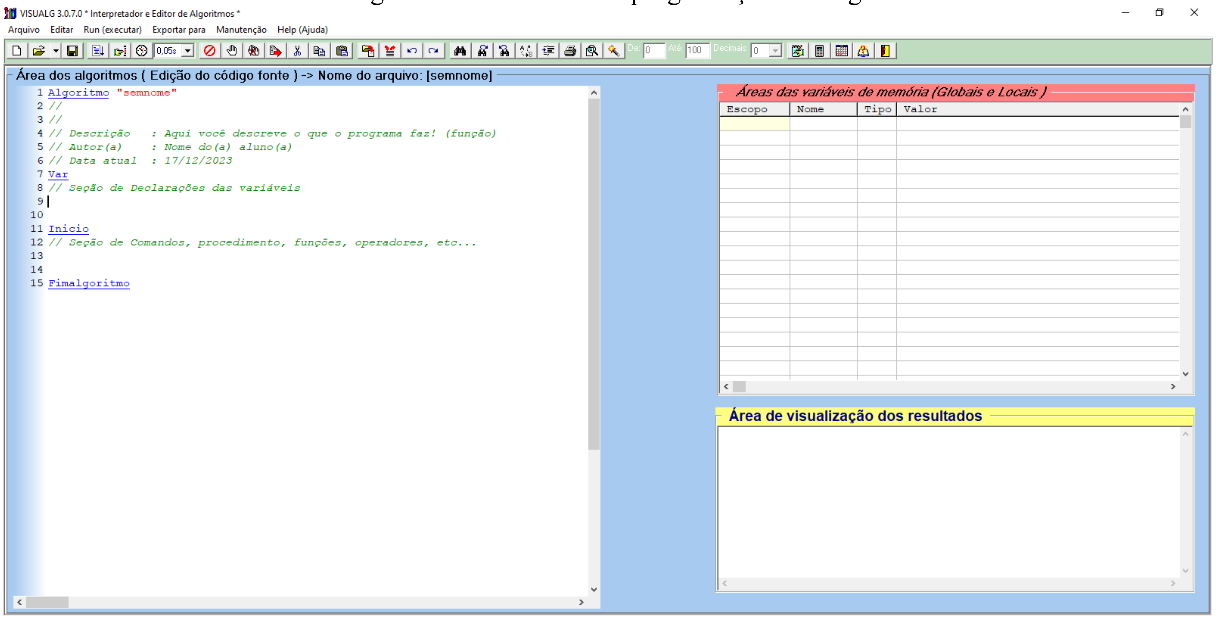
Figura 01: Antonio Carlos Nicolodi

Fonte: https://www.infoescola.com/noticias/professor-brasileiro-desenvolve-metodo-e-aplicativo-que-facilitam-o-aprendizado-de-programacao/

A figura a seguir, mostra a tela principal do Visualg. Nessa tela temos um menu com as seguintes opções: Arquivo, Editar, Run (executar), Exportar para, Manutenção e Help (Ajuda). Temos também uma barra de ferramentas, uma área dos algoritmos, uma área de variáveis de memória e uma área de visualização dos resultados.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Figura 02: O ambiente de programação Visualg.



Fonte: Elaborado pelos autores.

A estrutura de decisão possui instruções que devem ser executadas apenas quando a condição for satisfeita, isto é, quando a condição for verdadeira. Sintaxe:

Figura 03: Sintaxe da estrutura de decisão.

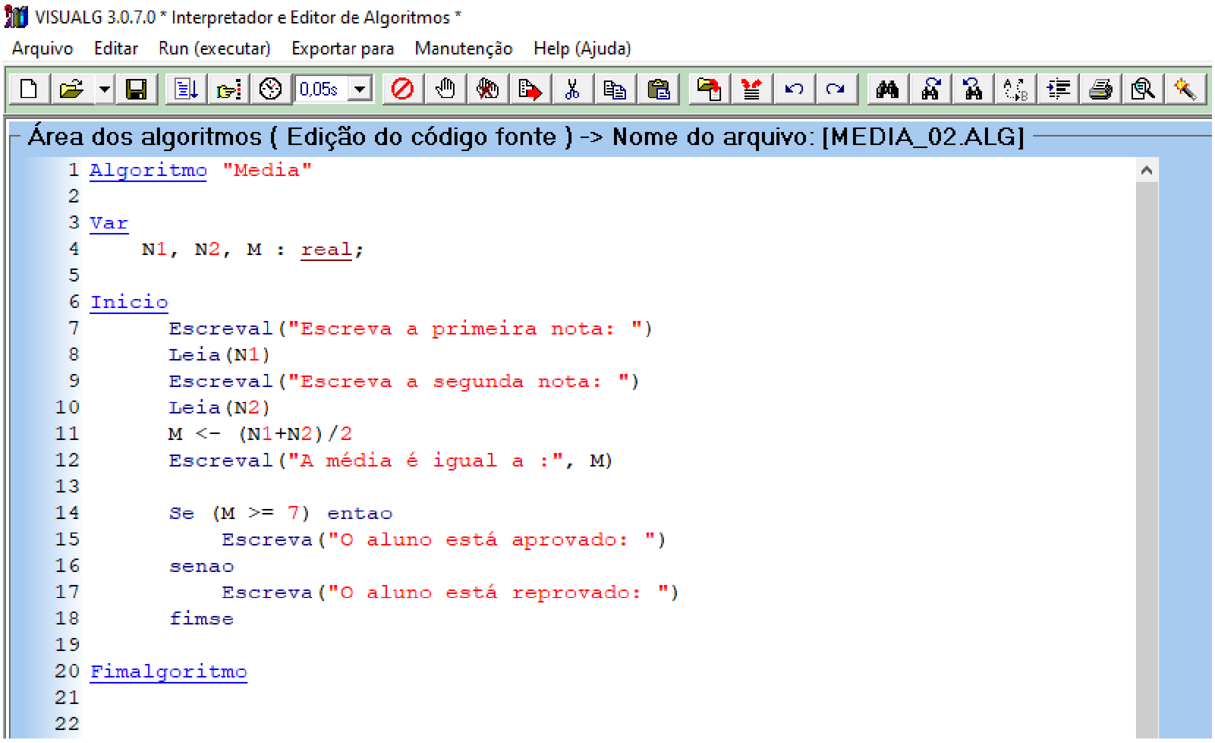
```
Se (expressão condicional) entao
(bloco de instruções)
Fimse
```

Fonte: Elaborado pelos autores.

Para compreender um pouco da estrutura de programação em Visualg iremos exibir um algoritmo. Esse algoritmo calcula a média aritmética de duas notas de um aluno. Se a média for maior ou igual a 7 então o comando que mostra a frase ‘O aluno está aprovado’ é executado, caso contrário outro comando que mostra a frase ‘O aluno está reprovado’ é executado.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Figura 04: Algoritmo Média Aritmética.

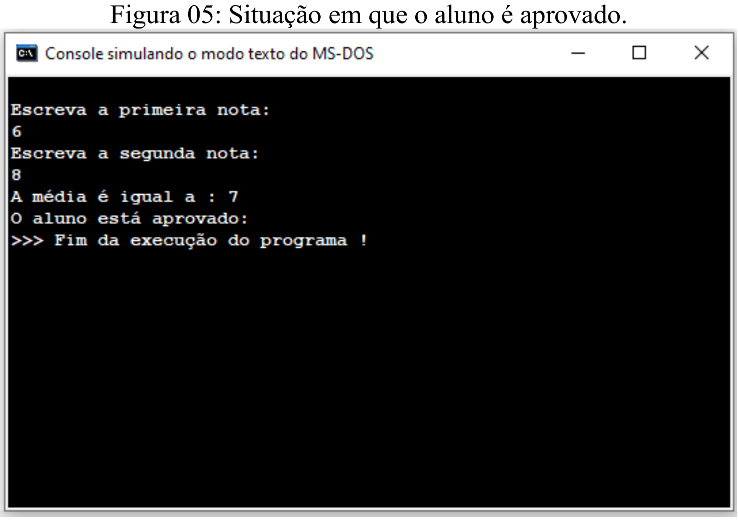


Fonte: Elaborado pelos autores.

Primeiro é dado um nome para o algoritmo. Depois são declaradas as variáveis que serão utilizadas. Nesse caso foram utilizadas as variáveis N1, N2 e M (todas do tipo real). Após declarar as variáveis são solicitadas duas notas do aluno e depois é mostrada a média do mesmo. Por fim, utilizando a estrutura condicional é escrito na tela se o aluno foi aprovado ou reprovado.

A seguir, temos a execução desse algoritmo. Mostrando uma situação em que o aluno está aprovado e uma situação em que o aluno está reprovado.4

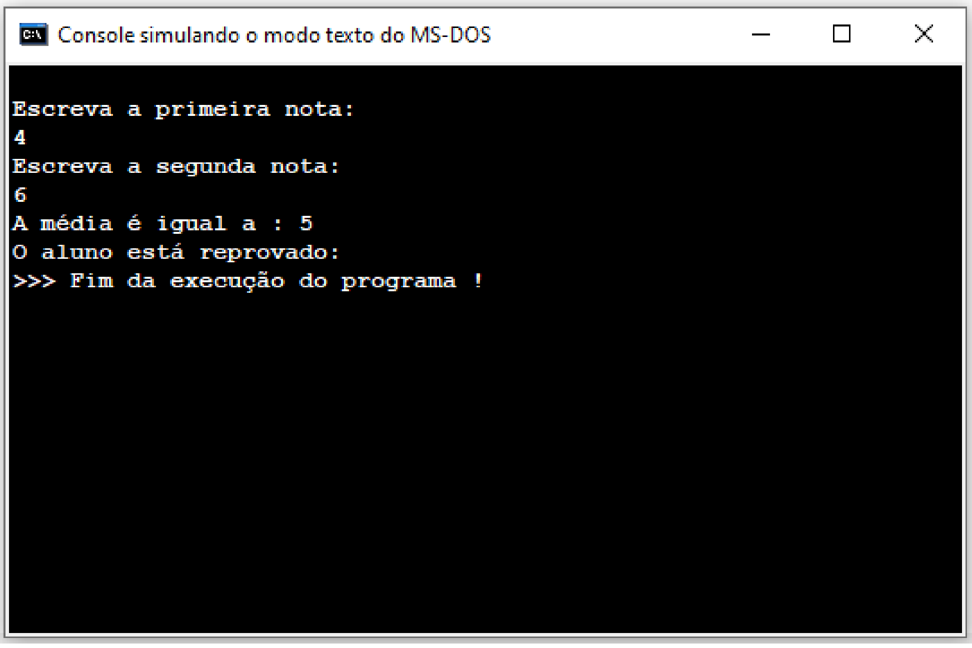
Figura 05: Situação em que o aluno é aprovado.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Figura 06: Situação em que o aluno é reprovado.



Fonte: Elaborado pelos autores.

As estruturas de repetição são também chamadas de laços ou loops e correspondem a uma modalidade de programação em que o objetivo é repetir, iterar, determinado trecho de um programa, certo número de vezes. Sintaxe:

Figura 07: Sintaxe da estrutura de repetição.

```
Para i de 1 ate n faca
(bloco de instruções)
Fimpara
```

Fonte: Elaborado pelos autores.

A seguir, temos um algoritmo que determina todos os divisores positivos de um número.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Figura 08: Algoritmo que determina os divisores de um número.

VISUALG 3.0.7.0 * Interpretador e Editor de Algoritmos * última atualização: 03 de Outubro de 2015 *

Arquivo Editar Run (executar) Exportar para Manutenção Help (Ajuda)

Área dos algoritmos (Edição do código fonte) -> Nome do arquivo: [DIVISORES.ALG]

```
Algoritmo "Divisores"
Var
 i, n, resto: inteiro

Inicio
Escreval("Digite um número. ")
Leia(n)
Escreval("                    ")
Escreval("Os divisores de ",n,"  são :")
Escreval("                    ")
Escreva("D(",n,")={")

Para i de 1 ate n-1 faca
     resto<-n mod i
     Se (resto=0) entao
         Escreva(i,",")
     fimse
Fimpara

Escreva(n, "}")

Fimalgoritmo
```

Fonte: Elaborado pelos autores.

Primeiro é dado um nome para o algoritmo. Depois são declaradas as variáveis que serão utilizadas. Nesse caso foram utilizadas as variáveis **i**, **n** e **resto** (todas do tipo inteiro). Após declarar as variáveis é solicitado o número que se deseja saber quais são os divisores. Por fim, utilizando a estrutura de repetição é escrito na tela os divisores do número solicitado.

A seguir, temos a execução desse algoritmo. Mostrando os divisores de 60.

Figura 09: Obtendo os divisores de 60.

Console simulando o modo texto do MS-DOS

```
Digite um número.
60

Os divisores de  60  são :

D( 60)={ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}
>>> Fim da execução do programa !
```

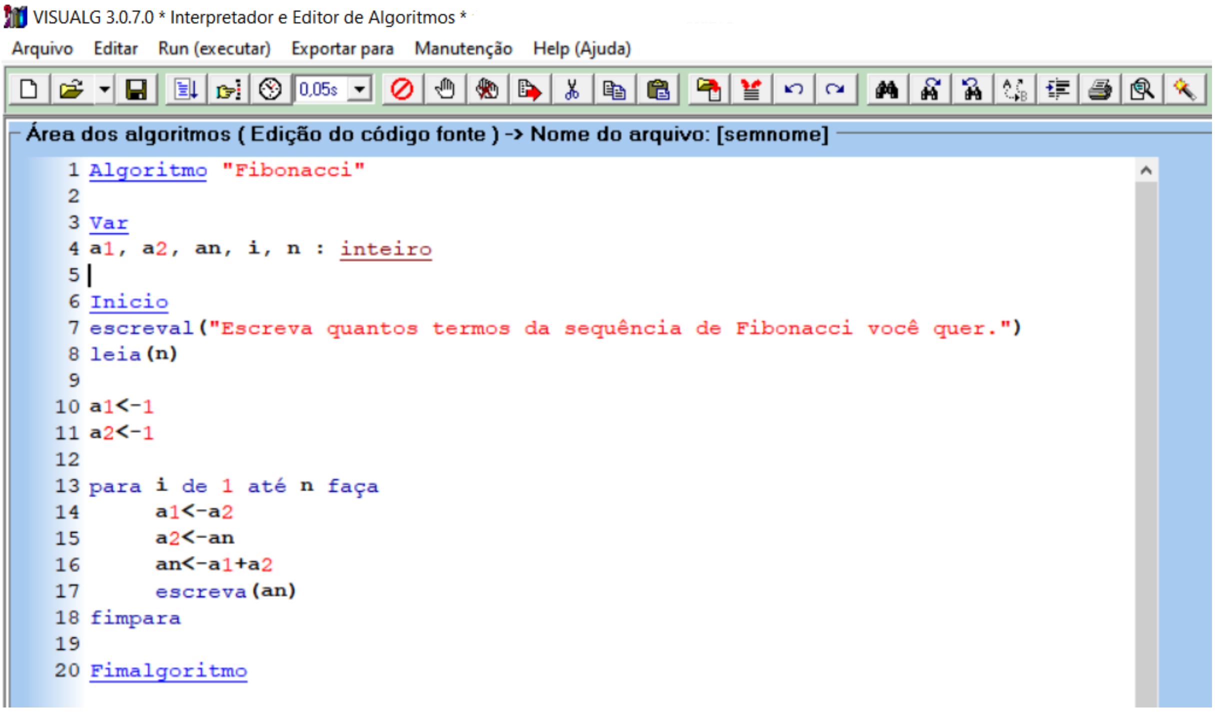
Fonte: Elaborado pelos autores.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

4 ALGORITMO COMPUTACIONAL PARA DETERMINAR OS TERMOS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

O algoritmo computacional a seguir determina os n primeiros termos da sequência de Fibonacci.

Figura 10: Algoritmo para determinar os termos da sequência de Fibonacci.



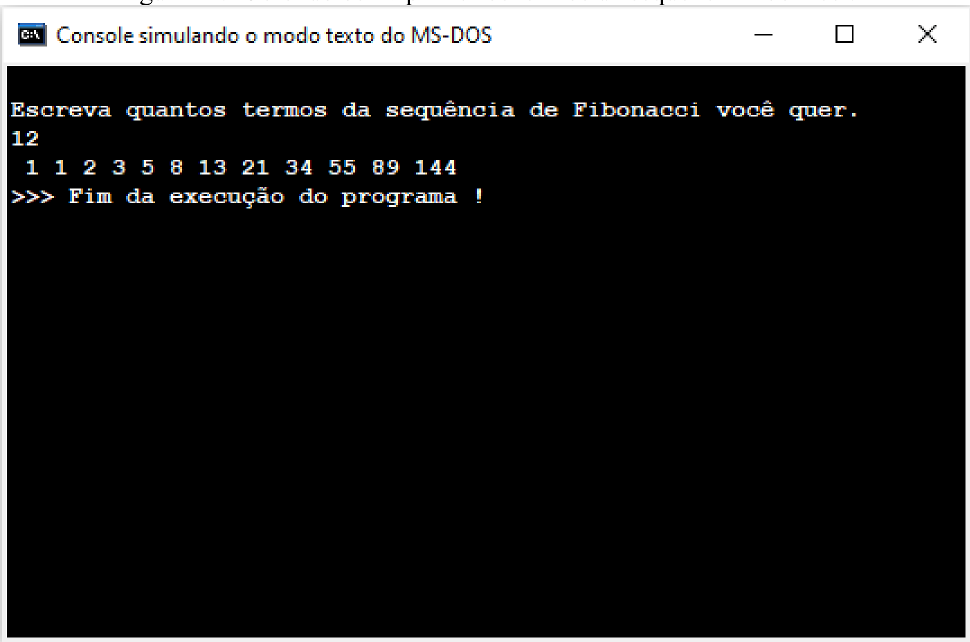
Fonte: Elaborado pelos autores.

A estrutura do algoritmo é bem simples. Primeiro é dado um nome para o algoritmo. Depois são declaradas as variáveis que serão utilizadas. Nesse caso foram utilizadas as variáveis a1, a2, an, i e n (todas do tipo inteiro). Após declarar as variáveis é solicitada a quantidade de termos que se quer da sequência de Fibonacci, nesse caso será n. Por fim, utilizando a estrutura de repetição são escritos os n primeiros termos da sequência.

Executando o algoritmo escrito no Visualg conseguimos determinar os 12 primeiros termos da sequência de Fibonacci. A figura a seguir mostra os 12 primeiros termos da sequência de Fibonacci.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Figura 11: Obtendo os 10 primeiros termos da sequência Fibonacci.

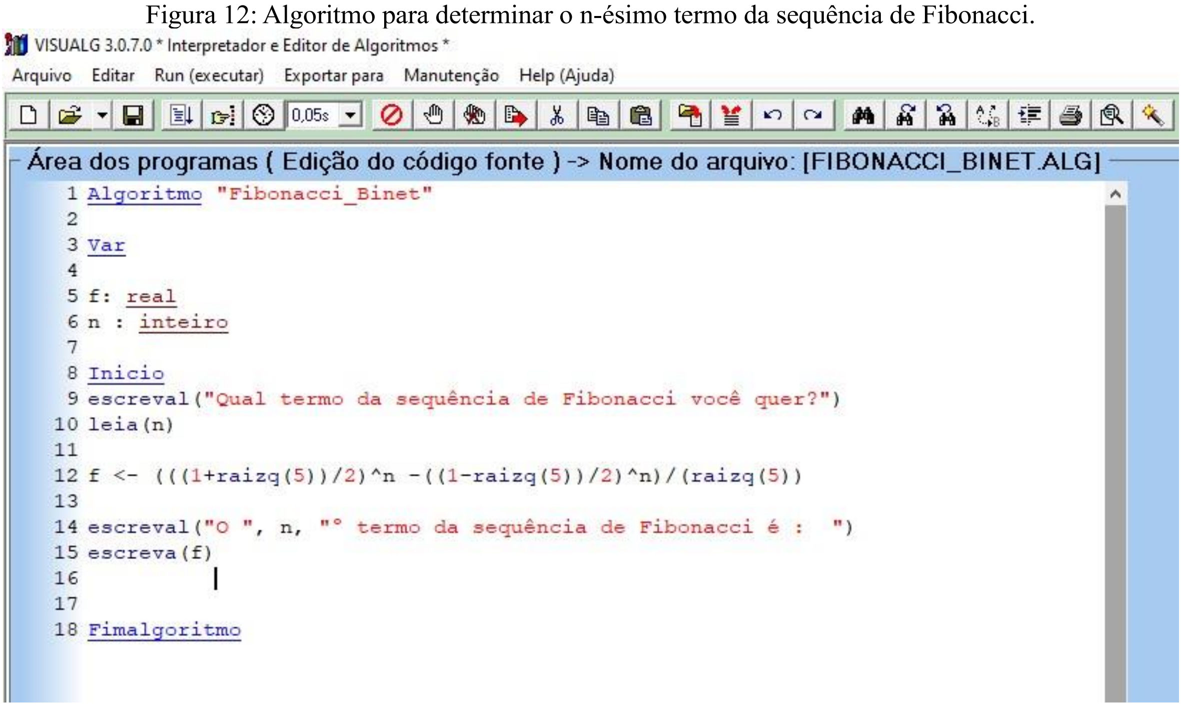


Fonte: Elaborado pelos autores.

O algoritmo computacional a seguir determina o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci. Para isso, é utilizada a fórmula de Binet abaixo.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

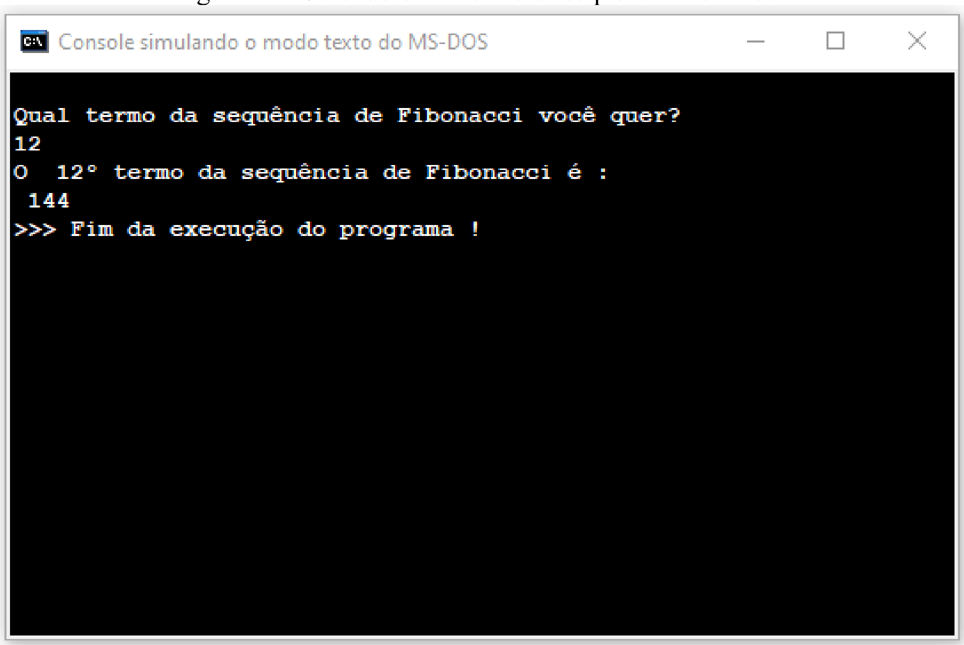
Figura 12: Algoritmo para determinar o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Figura 13: Obtendo o 12º termo da sequência Fibonacci.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Portanto, a quantidade de coelhos após um ano (12 meses) será 144. A quantidade de coelhos após n meses será dada pela recorrência ou pela fórmula de Binet. Por fim, obtemos esses valores utilizando os algoritmos computacionais implementados anteriormente.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, foram construídos dois algoritmos computacionais em Visualg: um para determinar os n primeiros termos da sequência de Fibonacci e outro para determinar o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci. O primeiro algoritmo foi executado e os 12 primeiros termos da sequência de Fibonacci encontrados foram os números: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 e 144. O segundo algoritmo (utilizando a fórmula de Binet) foi executado e o número encontrado foi 144.

Houve um pouco de dificuldade para fazer o algoritmo utilizando a fórmula de Binet, pois a quantidade de parêntesis necessários para a escrever a fórmula no Visualg foi superior ao da fórmula escrita em linguagem matemática. Foi necessário substituir os colchetes da fórmula de Binet por parêntesis no Visualg.

Por fim, apreendemos que saber uma fórmula para determinar o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci torna mais fácil o trabalho de encontrar esse termo. Além disso, ter um algoritmo computacional para determinar os n primeiros termos da sequência e outro para encontrar o n-ésimo termo torna mais prático o estudo e a aplicação do tema.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

REFERÊNCIAS

BURTON, David. Elementary Number Theory. New York: McGraw Hill, 2010.

HEFEZ, Abramo. Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

IEZZI, Gelson. Fundamentos da matemática elementar: sequências, matrizes e sistemas. São Paulo: Atual, 2013.

MATHIAS, Ivo Mario. Algoritmos e programação I. Ponta Grossa: UEPG, 2017.

SILVA, Reginaldo Leôncio. A fantástica sequência de Fibonacci e o enigmático número de outro: contexto histórico, definições, propriedades e aplicações. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, São Paulo, v18, 2020.