


## TEOREMA DE PITÁGORAS ESPACIAL NO TRIEDRO TRI-RETANGULAR VIA MATRIZ DE GRAM

 <https://doi.org/10.56238/arev6n4-008>

Data de submissão: 30/10/2024

Data de publicação: 30/11/2024

### **Ivanildo Silva Abreu**

Pós-Doutorado em Automação e Controle (EESC - USP)  
Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)  
E-mail: [ivanildoabreu@yahoo.com.br](mailto:ivanildoabreu@yahoo.com.br)  
Orcid:0009-0003-4764-5869  
Lattes: <http://lattes.cnpq.br/6144428536509111>

### **Elder Abreu Júnior**

Mestre em Matemática (PROFMAT-UFMA)  
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)  
E-mail: [Elderabreu@gmail.com](mailto:Elderabreu@gmail.com)  
Orcid:0009-0002-5733-5373  
Lattes: <http://lattes.cnpq.br/155147005147308>

### **Henrique Mariano Costa do Amaral**

Mestrado Engenharia de Sistemas e Computação (UFRJ)  
Universidade Estadual do Maranhão (UEMA).  
E-mail: [hmca132gmail.com](mailto:hmca132gmail.com)  
Orcid:0000-0002-9693-4064  
Lattes: <http://lattes.cnpq.br/0524178426308330>

### **Cristovam Filho Dervalmar Rodrigues Teixeira Filho**

Mestrado em Engenharia da Computação (UEMA)  
Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)  
E-mail: [cristovamfilho170132gmail.com](mailto:cristovamfilho170132gmail.com)  
Orcid:0009-0002-4368-1072  
Lattes:<http://lattes.cnpq.br/0601401510193184>

### **Karillos Alexandre Sousa Pereira**

Mestrado em Matemática (PROFMAT-UEMA)  
Secretaria Municipal de Magalhães de Almeida  
E-mail: [karillos-alexandre@hotmail.com](mailto:karillos-alexandre@hotmail.com)  
Orcid:0009-0007-9122-8965  
Lattes: <http://lattes.cnpq.br/7464568047977349>

### **Kiane Núbia Dias Muniz**

Mestranda em Matemática (PROFMAT-UEMA)  
Universidade Estadual do Maranhão  
E-mail: [kianemuniz@yahoo.com.br](mailto:kianemuniz@yahoo.com.br)  
Orcid:0009-0000-5622-5661  
Lattes: <http://lattes.cnpq.br/5444050740415348>

**Maciel dos Santos Silva**

Mestrado em Matemática (PROFMAT-UEMA-UEPI)

Centro Universitário Maurício de Nassau de Parnaíba

E-mail: [macieleu@hotmail.com](mailto:macieleu@hotmail.com)

Orcid:0009-0009-5656-9742

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/2638171085408652>

**Paulo Victor Brito Araújo**

Discente em Matemática (UEMA-Barreirinhas)

Colégio Assembleiano Universo de Saber (Barreirinhas- MA)

E-mail: [paulopeliculas08@gmail.com](mailto:paulopeliculas08@gmail.com)

Orcid:0009-0000-1685-5626

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/2643893848913327>

---

**RESUMO**

A demonstração deste trabalho usa tópicos de cálculo vetorial e álgebra para provar o teorema generalizado de Pitágoras no espaço utilizando um triedro tri-retangular que origina um tetraedro. O objetivo deste artigo é demonstrar que a soma dos quadrados das áreas das faces de um tetraedro equivale ao quadrado da face oposta. Amplamente foram utilizados alguns conceitos de produto escalar, identidade de Lagrange e matriz de Gram. Os resultados mostraram que suas várias aplicações, conduz-se a uma série de resultados e conclusões importantes na Matemática, Engenharia, Ciência e Geometria. Com isso, conclui-se que a generalização do teorema de Pitágoras por triedro tri-retângulo usando a matriz de Gram e esta Importante Identidade de Lagrange, é uma importante contribuição, pois amplia sua relevância e importância na matemática e outras áreas de conhecimento.

**Palavras-chave:** Identidade de Lagrange, Matriz de Gram, Generalização do teorema de Pitágoras.

## 1 INTRODUÇÃO

O teorema de Pitágoras, formulado no século VI a.C., representou um marco fundamental da história da matemática e geometria (BOYER, 2012). Contudo, ao longo dos séculos, matemáticos de diversas culturas buscaram generalizar esse teorema além do contexto inicial de triângulos retângulos no plano.

A busca por generalizações levou a descobertas notáveis, expandindo o alcance do teorema para diferentes dimensões e estruturas geométricas. A trajetória histórica dessa generalização reflete o desejo constante da humanidade de compreender e aplicar princípios matemáticos fundamentais em contextos cada vez mais abstratos e desafiadores.

Neste trabalho de pesquisa pretende-se realizar a demonstração do teorema de Pitágoras Generalizado, especificamente por meio de um triedro tri-retângulo, onde exploram-se as relações geométricas tridimensionais que envolvem os lados de um sólido. Diferentemente das demonstrações tradicionais no plano, essa abordagem expande a aplicação do teorema para situações mais complexas, diferentemente das convencionais.

Ao examinar os triedros tri-retângulos, que são constituídos por três vetores ortogonais, pode-se explorar as conexões entre os comprimentos desses vetores e investigar como o teorema de Pitágoras se manifesta no contexto tridimensional. Essa perspectiva contemporânea não apenas enriquece nossa compreensão da geometria espacial, mas também destaca a versatilidade e aplicabilidade contínua do conhecido teorema de Pitágoras em contexto mais abrangentes.

Desta maneira, esta pesquisa pretende preencher uma lacuna com relação a demonstrações desta generalização do teorema de Pitágoras, uma vez que foi realizado um estado da arte sobre o tema “Generalização do Teorema de Pitágoras usando Triedro Tri-Retângulo” e não foram encontradas demonstrações usando abordagens desta pesquisa.

Este tema referente a novas demonstrações sobre Generalização do teorema de Pitágoras usando o Triedro Tri-Retângulo, surgiu da necessidade de aprofundar o entendimento da Geometria Espacial contemporânea. À medida que a matemática evolui, surgem novas abordagens e contextos nos quais o teorema de Pitágoras pode ser aplicado, (ABREU, I., 2023)

A investigação dessas abordagens inovadoras em triedros tri-retângulos, como acima citadas, não apenas enriquece o conhecimento teórico, mas também oferece insights práticos em campos da física, engenharia e ciência da computação, onde aplicações tridimensionais são frequentes.

Além disso, compreender essas generalizações contribui para a expansão do repertório matemático, promovendo a descoberta de relações geométricas em ambientes mais complexos. Essa

pesquisa não só preserva a relevância do teorema de Pitágoras, mas também destaca seu papel adaptável e vital na resolução de problemas contemporâneos.

## 2 METODOLOGIA

Nesta esta pesquisa realizou-se uma revisão abrangente da literatura matemática para compreender as demonstrações existentes e as abordagens já utilizadas “Estado as Arte”, sobre o tema envolvendo as demonstrações sugeridas neste trabalho, com a finalidade de contribuir com nova prova deste teorema no espaço. Além disso, procurou-se identificar trabalhos recentes que tenham explorado o tema, destacando lacunas de conhecimento ou novas perspectivas.

De forma clara e concisa, estabeleceu-se a definição do triedro tri-retângulo, delimitando suas propriedades e características fundamentais, onde procurou-se explorar a relação entre os vetores ortogonais que compõem o triedro e sua relevância para o teorema de Pitágoras no espaço.

Uma comparação das novas demonstrações com as abordagens tradicionais, destacando semelhanças, diferenças e vantagens proporcionais pelo uso do triedro tri-retângulo foram realizadas.

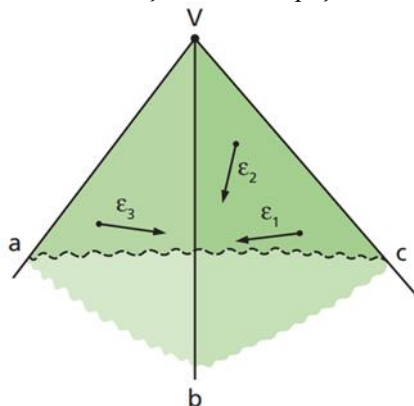
O triedro tri-retângulo é um conjunto de três segmentos de reta que se interceptam em um ponto e forma ângulos retos entre si. Uma das suas propriedades mais importantes é que as medidas das arestas que compõem cada plano estão na proporção de 3:4:5, o que implica que o triedro é tri-retângulo. Essa proporção única torna possível calcular as medidas das arestas desconhecidas de um triedro tri-retângulo, desde que se conheça a medida de pelo menos uma das arestas.

Os autores (IEZZI, Gelson, 2010) e apresentam uma explicação detalhada sobre o triedro tri-retangular e suas propriedades. Uma das afirmações dessa referência é que a proporção 3:4:5 é única para um triedro tri-retangular, e que, se as medidas das arestas não estiverem nessa proporção, o poliedro não é um triedro tri-retangular. Além disso, como mencionado anteriormente, esta proporção pode ser usada para calcular as medidas das arestas desconhecidas de um triedro tri-retangular, desde que se conheça a medida de pelo menos uma das arestas. Isso torna o triedro tri-retangular ainda mais útil para cálculos em áreas que envolvem geometria espacial.

É importante ressaltar que a compreensão das propriedades do triedro tri-retangular é fundamental para um bom desempenho em geometria espacial. A seguir serão apresentados alguns dos conceitos e elementos relacionados a triedros de acordo com (DOLCE, 2013b Elon, 2014).

Um triedro é definido como a interseção de três semiespaços não coplanares que possuem a mesma origem  $V$ . Esses semiespaços são representados por  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$ , que contêm as semirretas  $V_a$ ,  $V_b$  e  $V_c$  respectivamente. O triedro é representado por  $V(a, b, c)$  e é dado pela interseção dos três semiespaços (Figura 1):

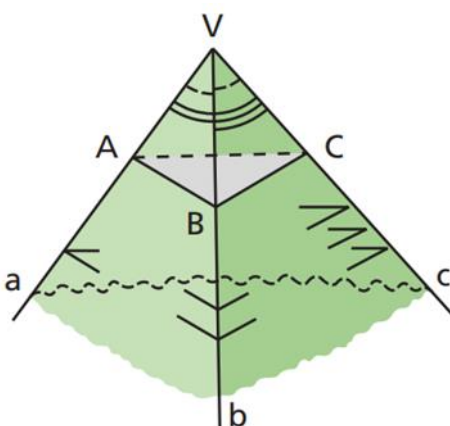
Figura 1-Triedro: Dolce e Pompeu (2013).  
Interseção de semiespaços



É possível definir o triedro como a união de três setores angulares formados pelas semirretas  $V_a$ ,  $V_b$  e  $V_c$ . Então ele é denominado de setor triedral ou ângulo sólido de três arestas. A orientação do triedro pode variar, mas ele sempre será a interseção dos três semiespaços ou a união dos três setores angulares (Camargo; Carvalho, 2007). Elementos de um triedro (Figura 2):

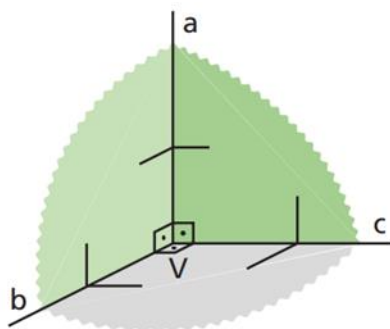
- Os elementos de um triedro incluem o vértice  $V$ , as três arestas  $V_a$ ,  $V_b$ ,  $V_c$  e as três faces ou ângulos de face:  $\widehat{aVb}$ ,  $\widehat{aVc}$  e  $\widehat{bVc}$  (ou  $\widehat{ab}$ ,  $\widehat{ac}$  e  $\widehat{bc}$ ).
- Os diedros do triedro são denotados por  $di(a)$ ,  $di(b)$ ,  $di(c)$  e cada um deles é determinado por duas faces do triedro.
- Uma seção do triedro é um triângulo  $ABC$  com um único vértice em cada aresta.

Figura 2-Dolce e Pompeu (2013b).  
Elementos de um triedro



Um triedro notável é o triedro tri-retângulo (ou triedro tri-retangular), que possui faces com ângulos retos e diedros retos (Figura 3).

Figura 3 -Dolce e Pompeu (2013a).  
Triedro notável



A presença do triedro tri-retangular na geometria espacial é amplamente estudada e explorada em diferentes livros, demonstrando a relevância desse poliedro na matemática e em áreas práticas. O estudo do triedro tri-retangular permite a solução de problemas envolvendo cálculos de medidas desconhecidas em poliedros, tornando-o uma ferramenta útil para aplicações em áreas como engenharia, arquitetura e arte, (DOLCE, Osvaldo, 2013b).

Como já foi dito anteriormente, o teorema de Pitágoras é uma das mais importantes e fundamentais descobertas da matemática, e tem sido utilizado por inúmeras gerações de estudantes e profissionais em todo o mundo. O teorema, como já vimos, estabelece que, em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa (o lado oposto ao ângulo reto) é igual à soma dos quadrados dos catetos (os outros dois lados).

O triedro tri-retangular, por sua vez, é um conjunto de três planos que se intersectam em um ângulo reto e formam um sistema de coordenadas cartesianas tridimensionais. Esse sistema é fundamental para a geometria analítica e para diversas áreas da matemática e da física.

A relação entre o teorema de Pitágoras e o triedro tri-retangular é bastante interessante e relevante, uma vez que o teorema pode ser usado para calcular a distância entre dois pontos em um sistema de coordenadas tridimensionais, (CAMARGO, 2007). Para entender essa relação, podemos imaginar um ponto P no triedro tri-retangular, com coordenadas  $(x,y,z)$ , e outro ponto Q com coordenadas  $(x',y',z')$ .

A distância entre esses dois pontos é dada por:

$$d = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

Essa fórmula pode ser facilmente derivada a partir do teorema de Pitágoras (STEINBRUCH, Winterle, 1991). Além disso, o triedro tri-retangular também pode ser usado para visualizar as relações

entre os diferentes ângulos e lados de um triângulo retângulo. Por exemplo, pode-se imaginar um triângulo retângulo ABC com a hipotenusa AB e os catetos AC e BC.

Se traçar um plano que contém a hipotenusa AB e a reta perpendicular a ela que passa pelo ponto C, tem-se um dos planos do triedro tri-retangular.

Esse plano também irá conter o ângulo reto C, e pode utilizar as relações trigonométricas do triângulo retângulo para calcular os valores dos outros ângulos e lados. Por exemplo, a tangente do ângulo C para calcular a medida do cateto oposto AC, ou a cossecante do ângulo C para calcular a medida da hipotenusa AB.

Assim, a relação entre o teorema de Pitágoras e o triedro tri-retangular é fundamental para a geometria analítica e para a visualização das relações entre os diferentes ângulos e lados de um triângulo retângulo em três dimensões. Essa relação é amplamente explorada em diversos campos da matemática e da física, e pode ser encontrada em diversas referências bibliográficas, como (LAGES, Elon, 2006).

A seguir apresenta-se a base matemática que foi utilizada para desenvolver a pesquisa e a demonstração do Teorema de Pitágoras Generalizado que são aplicáveis ao triedro tri-retangular.

Dados dois vetores  $u, v \in \mathbb{R}^3$  em notação vetorial ou em forma de coordenadas:  $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} = (x_2, y_2, z_2)$ , chama-se produto escalar desses vetores, e se representa por  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , ao número real

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \quad (1)$$

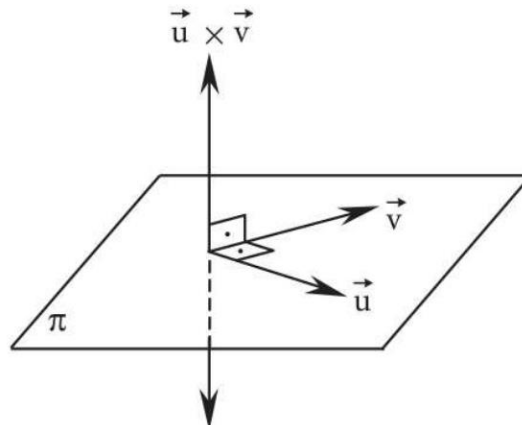
Chama-se produto vetorial de dois vetores  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} = (x_2, y_2, z_2)$ , tomados nessa ordem, e se representa por  $\vec{u} \times \vec{v}$  ao vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \quad (2)$$

Note que o produto vetorial de  $\vec{u}$  por  $\vec{v}$  também é indicado por  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  e lê-se “ $\vec{u}$  vetorial  $\vec{v}$ ” e que a definição de  $\vec{u} \times \vec{v}$ , dada em (2) pode ser obtida no desenvolvimento segundo o teorema de Laplace. Portanto  $\vec{u} \times \vec{v}$  é um vetor, (WINTERLE, Paulo, 2014).

A seguir, citam-se características importantes do produto vetorial  $\vec{u} \times \vec{v}$ : a) com relação a sua direção, este vetor  $\vec{u} \times \vec{v}$  é simultaneamente ortogonal aos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Veja Figura (3).

Figura 4:  $\vec{u} \times \vec{v}$  ortogonal aos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .  
Produto vetorial entre dois vetores



b) ) O comprimento do vetor  $\vec{u} \times \vec{v}$  é dado pela expressão a seguir, sendo  $\theta$  o ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não-nulos:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta \quad (3)$$

c) Identidade de Lagrange

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \quad (4)$$

## 2.1 DEMONSTRAÇÃO

Para a prova desta identidade, usam-se resultados já conhecidos dos produtos notáveis, que é o quadrado da diferença entre dois termos:

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= a^2 + b^2 - 2ab. \\ (a - b)^2 + (c - d)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(ab - cd) \end{aligned} \quad \begin{matrix} (5) \\ (6) \end{matrix}$$

Da Identidade de Lagrange, Equação (4), iremos denotar o primeiro membro desta igualdade por (I), ou seja,  $|\vec{u} \times \vec{v}|^2$ , e os termos  $|\vec{u}|^2$ ,  $|\vec{v}|^2$  e  $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2$  por (II) e (III), respectivamente. A idéia será mostrar que  $(I) = (II) - (III)$  para provar a identidade.

Da Igualdade (I), ou seja,  $|\vec{u} \times \vec{v}|^2$ , desenvolve-se a definição de produto vetorial entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em notação vetorial ou em forma de coordenadas, conforme a Equação (2):

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k} \\ &= ((y_1 z_2 - y_2 z_1), (x_1 z_2 - x_2 z_1), (x_1 y_2 - x_2 y_1)). \end{aligned} \quad (7)$$



Tomando o módulo do produto vetorial entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} |\vec{u} \times \vec{v}| &= \sqrt{(y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2} \\ |\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= (y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \end{aligned}$$

Usando o resultado da Equação (5),  $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ , tem-se:

$$\begin{aligned} (y_1z_2 - y_2z_1)^2 &= (y_1z_2)^2 + (y_2z_1)^2 - 2(y_1z_2)(y_2z_1). \\ &= y_1^2z_2^2 + y_2^2z_1^2 - 2y_1z_2y_2z_1. \quad (8) \\ (x_1z_2 - x_2z_1)^2 &= (x_1z_2)^2 + (x_2z_1)^2 - 2(x_1z_2)(x_2z_1). \\ &= x_1^2z_2^2 + x_2^2z_1^2 - 2x_1z_2x_2z_1. \quad (9) \\ (x_1y_2 - x_2y_1)^2 &= (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2 - 2(x_1y_2)(x_2y_1). \\ &= x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1y_2x_2y_1. \quad (10) \end{aligned}$$

Então, pode-se afirmar que  $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = (8) + (9) + (10)$ . (11)

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = y_1^2z_2^2 + y_2^2z_1^2 + x_1^2z_2^2 + x_2^2z_1^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2(y_1z_2y_2z_1 + x_1z_2x_2z_1 + x_1y_2x_2y_1). \quad (12)$$

Portanto, desenvolveu-se o primeiro membro da Identidade de Lagrange, Equação (4). O próximo passo será desenvolver o segundo membro desta identidade que é composta pela expressão:

$$|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2. \quad (13)$$

Agora iremos realizar o desenvolvimento individual de cada membro da Equação (13) e mostrar que A Equação (12) equivale a Equação (13).

$$\begin{aligned} |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2). \\ &= x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_1^2z_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + y_1^2z_2^2 + z_1^2x_2^2 + z_1^2y_2^2 + z_1^2z_2^2. \quad (14) \end{aligned}$$

Usando a definição do produto escalar usual, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{u} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot \vec{v} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) \triangleq x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \\ (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 &= (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 = (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2). \quad (15) \end{aligned}$$

Aplicando-se a Propriedade distributiva na Equação (15) e rearranjando, vem

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + z_1^2z_2^2 + 2(x_1x_2y_1y_2 + y_1y_2z_1z_2 + z_1z_2x_1x_2). \quad (16)$$

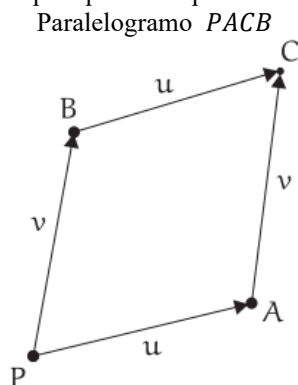
$$\begin{aligned} |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 &= (\text{Equação(14)} - \text{Equação(16)}): \\ |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 &= x_1^2y_2^2 + x_1^2z_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2z_2^2 + z_1^2x_2^2 + z_1^2y_2^2 - 2(x_1x_2y_1y_2 + y_1y_2z_1z_2 + z_1z_2x_1x_2). \quad (17) \end{aligned}$$

Comparando as Equações (12) e (17), deduz-se que a Equação (4), Identidade de Lagrange, está demonstrada.

Para utilizar a definição da Matriz de Gram nesta demonstração, iremos assumir que para a área de um paralelogramo, consideram-se três (3) pontos não colineares no espaço:  $P, A, B \in \mathbb{R}^3$ .

Fazendo  $\vec{u} = \overrightarrow{PA}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{PB}$  e considerando  $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{PC}$ , obtém-se o paralelogramo  $PACB$ , no qual  $A = P + \vec{u}$ ,  $B = P + \vec{v}$  e  $C = P + (\vec{u} + \vec{v})$ . Veja Figura (4) a seguir:

Figura 4: Paralelogramo determinado pelo ponto P e pelos vetores  $\vec{u}, \vec{v}$ . (WINTERLE, Paulo, 2014)



A matriz de Gram dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é por definição a expressão:

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{bmatrix} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Sem nenhuma dificuldade, mostra-se que  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ , veja (STEINBRUCH, Alfredo, 1991).

Na referência (LAGES, Elon, 2014) mostra-se que o determinante da matriz de Gram,  $\det. g(\vec{u}, \vec{v})$ , é o quadrado da área do paralelogramo  $PACB$ . Veja a Figura (4). Segue a Expressão Analítica do Teorema:

$$\det. g(\vec{u}, \vec{v}) = (\text{Área do paralelogramo } PACB)^2.$$

Diante da exposição dos conteúdos acima, iremos considerar um triedro tri-retângulo de vértice  $O$ , cortado por um plano qualquer, formando o tetraedro  $OABC$  conforme Figura (5). Sejam  $S_1 = \text{Área do } \triangle_{ABC}$ ,  $S_2 = \text{Área do } \triangle_{OBC}$  e  $S_3 = \text{Área do } \triangle_{OCA}$ . O objetivo é demonstrar que o quadrado da área do triângulo  $ABC$  é igual a soma dos quadrados das áreas dos outros três triângulos, usando a Identidade de Lagrange na matriz e Gram.

Em outras palavras, podemos dizer que o alvo deste trabalho é mostrar de forma analítica que a aplicação da identidade de Lagrange juntamente com a matriz de Gram, conduz ao Teorema de Pitágoras Generalizado usando o triedro tri-retângulo. Na referência (LAGES, Elon, 2006), afirma-se que “O quadrado da área do triângulo  $ABC$  é igual a soma dos quadrados das áreas dos outros três triângulos”. Em trabalho de pesquisa anterior, mostrou-se que este mesmo problema foi demonstrado usando (ABREU, I., 2023).

Demonstração (Teorema de Pitágoras Generalizado no Triedro-Retangular usando a Matriz de Gram).

Considere o produto vetorial dos vetores “ $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ” dado por

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \text{ Então}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2. \quad (19)$$

Por outro lado, matriz de Gram dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é por definição a expressão:

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{bmatrix} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \\ x_2 x_1 + y_2 y_1 + z_2 z_1 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Sem nenhuma dificuldade, mostra-se que  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ , produto interno usual, veja Equação (1).

Segue que:

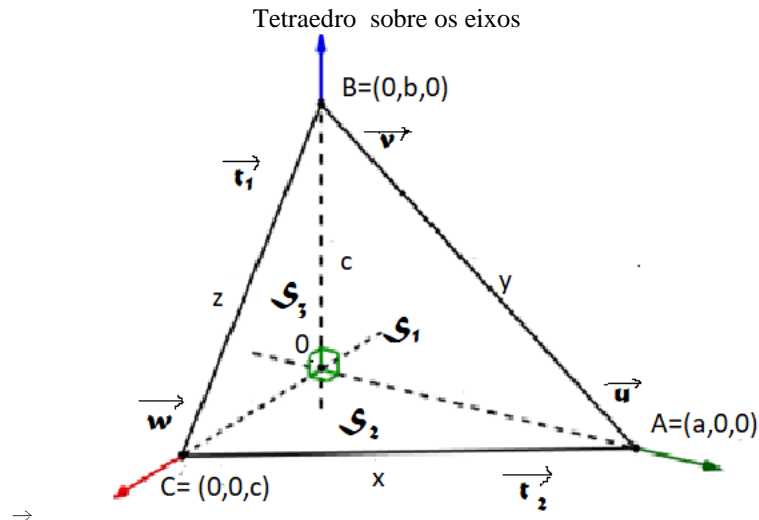
$$\det. g(\vec{u}, \vec{v}) = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2$$

$$= |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = |\vec{u} \times \vec{v}|^2 \text{ (Identidade de Lagrange)}$$

$$\text{Assim, } \det. g(\vec{u}, \vec{v}) = (\text{Área do paralelogramo } PACB)^2. \quad (21)$$

Para esta nova demonstração do Teorema de Pitágoras Generalizado, utiliza-se a Figura (5) do Triedro Tri-retangular sobre os eixos coordenados no espaço,  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , e assume-se que  $A = (0, c, 0)$ ,  $B = (b, 0, 0)$  e  $C = (0, 0, a)$ . Para este fim, considere as seguintes relações clássicas dos três triângulos retângulos envolvidos na figura. Sejam  $S, S_1, S_2$  e  $S_3$  as áreas dos triângulos retângulos  $ABC$ ,  $AOC$ ,  $BOC$  e  $AOB$ . Ainda para a Figura (2), considere os vetores  $\vec{u} = (b, 0, 0)$ ,  $\vec{v} = (0, 0, a)$  e  $\vec{w} = (0, c, 0)$  sobre os eixos coordenados.

FIGURA 5: TETRAEDRO TRI-RETANGULAR SOBRE OS EIXOS



Então deduz-se pela Figura 1 que  $S = \frac{1}{2} (\text{Área do paralelogramo } PACB)$

$$\text{Área do paralelogramo } PACB = 2S. \quad (22)$$

Substituindo a Equação (22) na Equação (21), tem-se que:

$$\det. g(\vec{u}, \vec{v}) = (2S)^2 = 4S^2. \quad (23)$$

Observe que  $S$  é a área do  $\Delta_{ABC}$ , e deve-se mostrar que o quadrado da área do triângulo  $ABC$  é igual a soma dos quadrados das áreas dos outros três triângulos da Figura 3. Daí segue que

$$S^2 = \frac{1}{4} \det. g(\vec{t}_1, \vec{t}_2). \quad (24)$$

Então deduz-se as seguintes relações para áreas dos outros três triângulos:

$$\begin{aligned} S_1^2 &= \frac{1}{4} \det. g(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow 4S_1^2 = \det. g(\vec{u}, \vec{v}). \\ S_2^2 &= \frac{1}{4} \det. g(\vec{u}, \vec{w}) \rightarrow 4S_2^2 = \det. g(\vec{u}, \vec{w}). \quad (+) \\ S_3^2 &= \frac{1}{4} \det. g(\vec{v}, \vec{w}) \rightarrow 4S_3^2 = \det. g(\vec{v}, \vec{w}). \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 4S_1^2 + 4S_2^2 + 4S_3^2 &= \det. g(\vec{u}, \vec{v}) + \det. g(\vec{u}, \vec{w}) + \det. g(\vec{v}, \vec{w}). \\ 4(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) &= \det. g(\vec{u}, \vec{v}) + \det. g(\vec{u}, \vec{w}) + \det. g(\vec{v}, \vec{w}). \end{aligned} \quad (26)$$

Neste ponto, calcula-se individualmente as matrizes de Gram formadas pelos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ .

$$\begin{aligned} \det. g(\vec{u}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{vmatrix} = a^2 b^2. \\ \det. g(\vec{u}, \vec{w}) &= \begin{vmatrix} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \\ \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & c^2 \end{vmatrix} = a^2 c^2. \\ \det. g(\vec{v}, \vec{w}) &= \begin{vmatrix} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle & \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \\ \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle & \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & c^2 \end{vmatrix} = b^2 c^2. \end{aligned}$$

Daí deduz-se que da Equação (26) o seguinte resultado:

$$4(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) = a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2. \quad (27)$$

Finalmente calcula-se a área frontal  $S$  do  $\Delta_{ABC}$  que é formado pelos vetores  $\vec{t}_1 = (0, b, -c)$  e  $\vec{t}_2 = (a, 0, -c)$ . Daí:

$$\begin{aligned} 4S^2 &= \frac{1}{4} \det. g(\vec{t}_1, \vec{t}_2) = \frac{1}{4} \det \begin{vmatrix} \langle \vec{t}_1, \vec{t}_1 \rangle & \langle \vec{t}_1, \vec{t}_2 \rangle \\ \langle \vec{t}_2, \vec{t}_1 \rangle & \langle \vec{t}_2, \vec{t}_2 \rangle \end{vmatrix} \\ 4S^2 &= \det \begin{vmatrix} b^2 + c^2 & c^2 \\ c^2 & a^2 + c^2 \end{vmatrix} = (b^2 + c^2) \cdot (a^2 + c^2) - c^4 \\ &= b^2 a^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 + c^4 - c^4. \\ 4S^2 &= a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Comparando as Equações (27) e (28), tem-se:

$$4S^2 = 4(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \rightarrow S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad \text{cqd.} \quad (29)$$

Daí pode-se concluir com esse último resultado apresentado pela Equação (29) que atingimos o nosso objetivo.

### 3 RESULTADOS

Nesta seção apresentam-se e interpretam-se as principais descobertas no desenvolvimento do trabalho, relacionando-as com os objetivos propostos. No caso do tema Teorema de Pitágoras Generalizado no Triedro Tri-Retangular via Matriz de Gram, os resultados enfatizam tanto os aspectos teóricos quanto suas possíveis aplicações. Aqui estão os tópicos que puderam ser desenvolvidos: Formulação Matemática do Teorema Generalizado, sendo que se demonstrou a descoberta geral desenvolvida para o Teorema de Pitágoras Generalizado no triedro tri-retangular. Relacionou-se a expressão acima com a Matriz de Gram e mostrou-se como ela simplifica os cálculos ao garantir que, no caso de vetores ortogonais, os termos fora da diagonal são nulos. Explica-se como o determinante da Matriz de Gram, nesse caso específico, pode ser usado para verificar a ortogonalidade e calcular o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores. Com relação a Generalidade do Método, demonstrou-

se que a formulação via Matriz de Gram é válida para dimensões maiores, com a soma dos quadrados das normas dos vetores ortogonais se mantendo verdadeira independentemente do número de dimensões. Apresentou-se casos em que a Matriz de Gram é usada para calcular volumes ou áreas em situações mais complexas, como em espaços de dimensões superiores ou com vetores não ortogonais. A simplicidade e a característica do método para generalizar o Teorema de Pitágoras, a contribuição do uso da Matriz de Gram para unificar a análise algébrica e geométrica e a robustez do método em contextos tridimensionais e suas extensões vem consolidar a metodologia em aplicações em diversas áreas da vida cotidiana.

#### 4 DISCUSSÃO

Com relação a discussão, deve-se destacar a interpretação com referência aos seguintes pontos:

- Sua interpretação: a explicação sobre como a Matriz de Gram fornece uma generalização do Teorema de Pitágoras pode ser estruturada em três partes: intuição geométrica, papel da matriz de Gram e generalização no contexto tridimensional. Isso pode ser feito pelo uso do teorema de Pitágoras no plano. Geometricamente, isso reflete a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos sendo igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa. Esse resultado está diretamente relacionado à ortogonalidade dos vetores associados aos lados do triângulo. Com relação a Generalização para Dimensões Maiores, como em um espaço tridimensional, o conceito de ortogonalidade se estende para vetores que são mutuamente perpendiculares (no caso de um triedro tri-retangular). Nessa configuração, o Teorema de Pitágoras pode ser generalizado para incluir a soma dos quadrados das normas de três vetores ortogonais.
- Relação a aplicação da Matriz de Gram com a geometria: enquanto o Teorema de Pitágoras clássico se limita às relações de comprimentos no plano, a Matriz de Gram oferece uma ferramenta que generaliza as ideias do teorema para múltiplas dimensões e para situações onde ortogonalidade e métricas mais complexas são fáceis. Isso conecta o teorema com conceitos avançados de álgebra linear.
- A relevância do uso da Matriz de Gram no Teorema de Pitágoras Generalizado no Triedro Tri-Retangular se manifesta de forma abstrata e generalizada, uma vez que a Matriz de Gram oferece uma maneira sistemática e algébrica de estudo de propriedades de estudo de propriedades geométricas como, comprimentos de vetores, ângulos entre vetores (através dos produtos internos), volumes de figuras geométricas. Destaca-se de forma evidente a conexão entre a álgebra Linear e a Geometria. Dentre as inúmeras aplicações podem-se destacar

Computação gráfica e Modelagem 3D, Engenharia e Física, Ciência de dados e Aprendizagem de Máquina.

A Matriz de Gram fornece uma generalização porque ela abstrai a ideia central do Teorema de Pitágoras (relações baseadas em ortogonalidade e soma de quadrados) para qualquer conjunto de vetores e dimensões, preservando a ligação entre álgebra linear e geometria.

O uso da Matriz de Gram transcende a simples generalização do Teorema de Pitágoras no espaço tridimensional. Ele se revela como uma ferramenta poderosa, unificando álgebra e geometria, possibilitando aplicações práticas em diversas áreas e abrindo caminhos para análises mais sofisticadas em matemática, ciência e tecnologia. Sua relevância está na capacidade de expandir conceitos clássicos, como o teorema de Pitágoras, para contextos mais gerais e de alta dimensionalidade, enquanto mantém a elegância e a simplicidade algébrica.

## 5 CONCLUSÃO

O estudo do Teorema de Pitágoras Generalizado no Triedro Tri-Retangular via Matriz de Gram demonstra que a abordagem apresentada mostrou-se especialmente relevante por sua simplicidade e eficiência, ao mesmo tempo em que oferece uma ferramenta robusta para análise de propriedades geométricas complexas, como volumes e ângulos em dimensões maiores. Além disso, a Matriz de Gram revelou-se útil para unificar conceitos fundamentais de álgebra e geometria, possibilitando aplicações que vão desde o cálculo de volumes até a verificação de ortogonalidade e por fim, este trabalho reforça que o uso da Matriz de Gram não apenas generaliza o Teorema de Pitágoras, mas também abre novas possibilidades de aplicação em diversas áreas da ciência e tecnologia. Essa abordagem combina matemática moderna e praticidade, oferecendo insights profundos e ampliando o alcance de conceitos clássicos para conteúdo.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão à Universidade Estadual do Maranhão (UEMA) e em especial ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) que nos forneceu um suporte técnico por meio dos ensinamentos vinculados ao programa, fornecendo uma base sólida para elaboração deste texto científico. Meu reconhecimento também se estende aos professores e colegas do PROFMAT, cujas orientações, desenvolvimento e colaborações foram desenvolvidas significativamente para o aprofundamento e a qualidade desta pesquisa.

## REFERÊNCIAS

- ABREU, I. S. Demonstrações contemporâneas do teorema de Pitágoras no espaço por triedro tri-retângulo. REVISTA CONTRIBUCIONES A LAS CIÊNCIAS SOCIALES. São José dos Pinhais, Paraná, Brasil, 2023, ISSN 1988-7833, V. 16, n.12, p. 32600-32620.
- ABREU, I. S. IV Encontro regional de matemática aplicada computacional, (IV ERMAC), E-book. ISBN 978-65-5363-336-0. Matemática aplicada ao ensino. Associação brasileira das editoras universitárias EDUMA, 2023.
- ABREU, I. S. Evolução do teorema de Pitágoras: do triângulo retângulo ao triedro tri-retangular. IV Encontro regional de matemática aplicada computacional, (IV ERMAC), E-book, São Luís-Maranhão, Brasil, 2023, ISBN 978-65-5363-336-0, p.129-135. Matemática aplicada ao ensino. Associação brasileira das editoras universitárias EDFUMA, 2023.
- BOYER, C. B., & Merzback U.C. História da matemática. 3. ed. São Paulo SP – Brasil; CDD – 510-9, ISBN 978-85-212-06415, editora Edgard Blucher, 2012.
- CAMARGO, I. de; CARVALHO, P. C. P. Geometria euclidiana plana. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção Matemática Universitária, 17).
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013a. v. 9.
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013b. v. 10.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D. Matemática elementar: geometria espacial. São Paulo: Atual Editora, 2010.
- LIMA, E. L. et al. Temas e problemas elementares. 12 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006. Coleção do Professor de Matemática.
- LIMA, E. L. et al. A matemática do ensino médio. 9 ed. Rio de Janeiro: Impa, 2006. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática).
- LIMA, E. L. Geometria analítica e álgebra linear. 1 ed. Rio de Janeiro: Instituto nacional de matemática pura e aplicada (IMPA); Coleção matemática universitária, 2014.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Álgebra linear e geometria analítica. São Paulo: McGraw-Hill, 1991.
- WINTERLE, P. Vetores e geometria analítica. 2 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.