Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

PROGRESSÕES DIRETA (SI) E INDIRETA (SLI) EM UM MODELO PARA A EPIDEMIA DE TUBERCULOSE

DIRECT (SI) AND INDIRECT (SLI) PROGRESSIONS IN A MODEL FOR THE TUBERCULOSIS EPIDEMIC

PROGRESIONES DIRECTA (SI) E INDIRECTA (SLI) EN UN MODELO PARA LA EPIDEMIA DE TUBERCULOSIS

https://doi.org/10.56238/arev8n1-047

Data de submissão: 07/12/2025 **Data de publicação:** 07/01/2026

Silvana Martins Ferreira
Mestra em Modelagem Matemática e Computacional
Instituição: Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)
E-mail: silvanaufrrj@hotmail.com

RESUMO
A modelagem matemática é fundamental para a investigação sobre a disseminação de uma doença infecciosa. A dinâmica entre os compartimentos é estudada pelos pesquisadores, que possuem uma missão importante para a Epidemiologia, que consiste em fazer previsões, a partir dos gráficos de evolução e dos dados numéricos obtidos. A transferência contínua entre esses grupos de indivíduos organizados em compartimentos, pode representar casos de infecção, situações de cura permanente ou temporária da doença. O modelo da Tuberculose apresentado neste artigo é expresso por um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares. A dinâmica entre os compartimentos pode ser organizada em duas etapas: progressão direta (modelo SI) e indireta (modelo SLI). O modelo completo contém os dois tipos de progressões. Estudaremos inicialmente a progressão direta e depois complementaremos com a indireta. A inclusão do modelo completo, altera a quantidade total de pessoas nas categorias dos doentes. Os indivíduos suscetíveis podem desenvolver a tuberculose rapidamente ou não. Com isso, temos quatro categorias de indivíduos: suscetíveis, latentes, infectados com tuberculose pulmonar e infectados com tuberculose extrapulmonar. Os indivíduos que alcançarem a categoria dos latentes, podem ser transferidos para as categorias de infectados e após serem curados, retornam para o grupo. O nosso objetivo será realizar simulações numéricas, atribuindo valores para os parâmetros, analisando os efeitos causados por alterações nesses dados, podendo fazer previsões. Utilizaremos a taxa de reprodutibilidade efetiva, para auxiliar na previsão sobre quando a doença se dissemina entre a população e quando é extinta.

Palavras-chave: Modelagem Tuberculose. Progressões Direta e Indireta Tuberculose. Modelo Básico Tuberculose.

ABSTRACT
Mathematical modeling is fundamental for investigating the spread of an infectious disease. The dynamics between compartments are studied by researchers, who have an important mission in Epidemiology, which is to make predictions based on evolution charts and the numerical data obtained. The continuous transfer between these groups of individuals organized into compartments can represent cases of infection, situations of permanent or temporary recovery from the disease. The Tuberculosis model presented in this article is expressed by a system of nonlinear ordinary differential equations. The dynamics between the compartments can be organized into two stages: direct

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

progression (SI model) and indirect progression (SLI model). The complete model contains both types of progressions. We will initially study the direct progression and later complement it with the indirect one. The inclusion of the complete model alters the total number of people in the sick categories. Susceptible individuals may develop tuberculosis quickly or not at all. Thus, we have four categories of individuals: susceptible, latent, infected with pulmonary tuberculosis, and infected with extrapulmonary tuberculosis. Individuals who reach the latent category can be transferred to the infected categories and, once cured, return to the group. Our goal will be to perform numerical simulations, assigning values to the parameters, analyzing the effects caused by changes in this data, and making predictions. We will use the effective reproductive rate to help forecast when the disease spreads among the population and when it is eradicated.

Keywords: Tuberculosis Modeling. Direct and Indirect Progressions of Tuberculosis. Basic Tuberculosis Model.

RESUMEN
La modelización matemática es fundamental para la investigación sobre la propagación de una enfermedad infecciosa. La dinámica entre los compartimentos es estudiada por los investigadores, quienes tienen una misión importante para la Epidemiología, que consiste en hacer predicciones a partir de los gráficos de evolución y de los datos numéricos obtenidos. La transferencia continua entre estos grupos de individuos organizados en compartimentos puede representar casos de infección, situaciones de curación permanente o temporal de la enfermedad. El modelo de Tuberculosis presentado en este artículo se expresa mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. La dinámica entre los compartimentos puede organizarse en dos etapas: progresión directa (modelo SI) e indirecta (modelo SLI). El modelo completo contiene ambos tipos de progresiones. Estudiaremos inicialmente la progresión directa y luego la complementaremos con la indirecta. La inclusión del modelo completo altera la cantidad total de personas en las categorías de los enfermos. Los individuos susceptibles pueden desarrollar la tuberculosis rápidamente o no. Con esto, tenemos cuatro categorías de individuos: susceptibles, latentes, infectados con tuberculosis pulmonar e infectados con tuberculosis extrapulmonar. Los individuos que alcancen la categoría de latentes pueden ser transferidos a las categorías de infectados y, después de ser curados, regresan al grupo. Nuestro objetivo será realizar simulaciones numéricas, asignando valores a los parámetros, analizando los efectos causados por cambios en estos datos, pudiendo hacer predicciones. Utilizaremos la tasa de reproductibilidad efectiva para ayudar en la predicción de cuándo la enfermedad se disemina entre la población y cuándo se extingue.

Palabras clave: Modelado de Tuberculosis. Progresiones Directa e Indirecta de Tuberculosis. Modelo Básico de Tuberculosis.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática em Epidemiologia, de acordo com Quadros (2013), é desenvolvida através do estudo de equações que descrevem a interação entre a população de uma região e o ambiente em que ela vive, resultando numa análise detalhada a respeito da doença. A importância desse estudo se dá ao fato de que quanto mais se conhece a respeito da doença e o modo como ela se propaga, mais eficazes serão os métodos para impedir sua transmissão, e até mesmo o estudo de ações preventivas, como por exemplo, campanhas de vacinação.

Os modelos matemáticos atuais buscam analisar detalhadamente a evolução da Tuberculose, com isso, estão cada vez mais complexos. Por este motivo, o que estamos propondo neste artigo, é a aprendizagem inicial de um modelo básico, que foi desmembrado em duas etapas para facilitar a compreensão: Progressão Direta (modelo SI) e indireta (modelo SLI). Este aprendizado facilitará o estudo de modelos mais complexos, portanto o que estamos propondo com este artigo é uma inicialização dos estudos, para um posterior aperfeiçoamento.

Penna (1994, p. 3 e 4) destaca que,

> [...] ao estudar-se um sistema dinâmico, tem-se como objetivo caracterizar completamente sua solução, e as alterações desta última com a variação dos parâmetros. Quando se aborda tal sistema através de simulações, corre-se o risco de, levando em consideração o número infinito de alterações possíveis, não se concluir nunca esta tarefa. De toda maneira, este tipo de trabalho não pode ser considerado nunca como indubitavelmente concluído.

Além disso, a inclusão da categoria dos latentes na progressão indireta provoca alterações na quantidade de indivíduos infectados obtida com a progressão direta. Consideramos, para análise da infecção rápida, um período em que os latentes ainda não foram contaminados e permanecem na classe dos suscetíveis. Observar o comportamento de evolução da doença a partir de poucos parâmetros, em um sistema com apenas quatro equações pode ser uma metodologia bem didática para que o leitor compreenda a importância dos modelos matemáticos nos estudos em Epidemiologia. O agente infeccioso é um indivíduo que foi contaminado e desenvolve a tuberculose pulmonar, se tornando um personagem principal em nossos estudos.

Gomes (2004, p. 4) explica que,

> [...] o indivíduo com tuberculose pulmonar responsável pela disseminação da doença transmite o bacilo através do processo da fala e de expectorações, tais como: tosse, espirro, entre outras, pois libera no ar gotículas que contém em seu interior o agente causador da TB. Um indivíduo que entre em contato com esse ar contaminado pode inalar o bacilo e esse pode se instalar em seu organismo. Estando o indivíduo infectado com esse bacilo ele pode se instalar nos pulmões ou através da corrente sanguínea atingir outros órgãos do corpo, tais como: os rins, os ossos, as meninges, entre outros.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Conhecer a dinâmica entre os sujeitos envolvidos neste modelo da Tuberculose, é imprescindível para se fazer previsões a partir dos gráficos de evolução e dos dados numéricos. A transferência contínua entre esses grupos de indivíduos, pode representar casos de infecção, situações de cura permanente ou temporária da doença. O modelo da Tuberculose, apresentado neste artigo é expresso por um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares. Considere a classe dos infectados do modelo SI, dividida em duas classes: a dos indivíduos com tuberculose pulmonar (agentes infecciosos) e a classe daqueles que possuem a extrapulmonar (não infecciosos).

De acordo com Gomes (2004, p.4), "a tuberculose (TB) é uma doença infectocontagiosa que tem como agente transmissor o Mycobacterium Tuberculosis ou bacilo de Koch, tendo como principal hospedeiro e transmissor o homem [...]".

Penna (1994, p. 22) indica que,

> [...] soluções numéricas e simulações realizadas por computadores permitem, nestes casos, avaliar o comportamento do modelo, frente a diferentes parâmetros ou premissas. Em outras palavras, em lugar de uma dedução das propriedades do sistema através de solução simbólica, as simulações permitem conhecê-las a partir de um processo de experimentação, simulando o efeito de diferentes parâmetros ou condições iniciais.

A nossa proposta será simplificar o modelo proposto por Dye et. al. (1998), não tratando da vacinação para os indivíduos suscetíveis. Analisaremos apenas os efeitos de um aumento ou diminuição nos parâmetros, e seus respectivos gráficos de evolução temporal. Apresentaremos paulatinamente as progressões direta e indireta, avaliando as diferentes situações de acordo com as taxas de reprodutibilidade. Só que deixamos a vacinação dos suscetíveis ou latentes como possibilidade para continuação desses estudos, assim como a criação de duas novas categorias, a dos vacinados e a dos recuperados. A categoria dos recuperados indicaria que foi aplicado algum tipo de tratamento, que fez com que infectados se reestabelecessem, não retornando ao grupo dos latentes e jamais voltassem a desenvolver a doença.

Gomes (2004, p. 2) destaca que,

> [...] o ressurgimento de epidemias como a de tuberculose, considerada erradicada em alguns países, constitui um grande desafio na definição de políticas públicas para a saúde, exigindo o desenvolvimento e a implantação de estratégias de ação que tenham como principal objetivo a informação, o combate e a erradicação da doença.

Segundo a FUNASA (1999 apud GOMES, 2004, p. 2), a tuberculose, como no passado, volta a representar um sério problema social. É a doença que mais se apresenta como causa-mortis dos acometidos pelo HIV quando comparada a qualquer outra doença, é também a que mais mata mulheres mesmo se comparada com as doenças maternas e entre adultos e jovens, é a doença infecciosa que mais faz vítimas.

2 PROGRESSÕES DIRETA E INDIRETA

Em uma população com N habitantes, suponha que ainda existam indivíduos suscetíveis S(t), e que este grupo cresce mediante uma taxa de nascimentos ou migrações (π) e sofre reduções (μ) por morte natural. Um ou mais indivíduos infectados com tuberculose pulmonar é introduzido nessa população. O indivíduo suscetível ao ser infectado, jamais volta a ser suscetível e não se recupera da doença, esta é a característica principal deste modelo.

Desta forma, uma porcentagem (p) de suscetíveis irá desenvolver alguma das duas formas de tuberculose, em até um ano. Neste caso, a progressão de suscetíveis para infectados é considerada rápida. O restante (1-p), após serem infectados, sairão do grupo dos suscetíveis e irão integrar o grupo dos latentes, que estudaremos na progressão indireta. Estes, só desenvolverão a doença após um ano.

Uma parcela (f) irá apresentar a forma pulmonar, que é contagiosa e o restante (1- f), a extrapulmonar, que não pode causar contágio. Estes indivíduos suscetíveis que foram infectados por um ou mais indivíduos com tuberculose pulmonar, e que apresentarem a doença na mesma forma, serão agrupados em $T_i(t)$. Já os suscetíveis que apresentarem a tuberculose extrapulmonar serão inseridos em $T_n(t)$.

Portanto, o agente causador das duas formas de tuberculose é o indivíduo que possui a tuberculose pulmonar, pois os indivíduos que possuem a forma extrapulmonar, não são capazes de contaminar outras pessoas.

Além disso, iremos considerar a parcela (μ) de indivíduos que morrem por outras causas que não seja a doença e a parcela (μ_t) dos indivíduos que morrem por tuberculose. No modelo suscetível-infectado (SI), quanto maior a taxa de contaminação β, mais pessoas ficarão infectadas. Neste modelo surge uma outra taxa, a de infecção λ. A taxa de infecção está relacionada diretamente com a taxa de contágio e com os valores da categoria de indivíduos com tuberculose pulmonar, pois ela é resultante do produto de (β) pelo valor de $T_i(t)$.

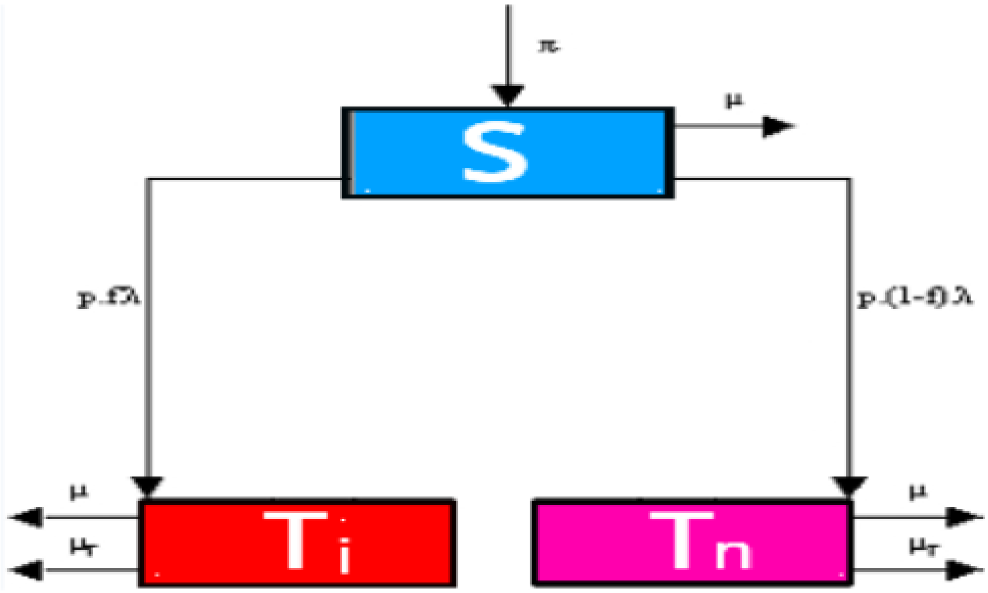
2.1 PROGRESSÃO DIRETA

De acordo com Teles (2020), os modelos epidemiológicos, representados por compartimentos S, I são ferramentas matemáticas poderosas para a dinâmica de sistemas complexos e suas interações. Esses sistemas têm importantes aplicações em diferentes áreas científicas e são fundamentais para a tomada de decisões na área da saúde pública e da pesquisa biomédica.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Na (Figura 1), podemos observar como funciona este modelo na progressão direta de suscetíveis para infectados com alguma das duas formas de tuberculose.

Figura 1. Diagrama compartimental que representa a Progressão Direta



Fonte: Autora

Podemos descrever o sistema de equações diferenciais do modelo SI, a partir dos três compartimentos S(t), T_i(t) e T_n(t), de acordo com o sistema de equações diferenciais ordinárias que será apresentado em (1). A partir do diagrama da (Figura 1), apenas aumentos na taxa de nascimentos, causam acréscimos no grupo dos suscetíveis. Quando ocorrem aumentos na taxa de mortos por causa natural ou na taxa dos indivíduos (p) que adquirem tuberculose em até um ano, diminuímos os suscetíveis, já que uma parcela (p) multiplicada pela taxa de infecção, sai dos suscetíveis para integrar os grupos de contaminados por qualquer uma das duas formas.

Se a taxa referente aos indivíduos que desenvolvem a tuberculose pulmonar (f) sofrer acréscimos, aumentamos este grupo de agentes infecciosos e diminuímos a categoria dos que desenvolverão a tuberculose extrapulmonar. Os acréscimos nas mortes de qualquer tipo, reduzem as categorias dos que possuem tuberculose. Neste modelo, estamos considerando as taxas de mortes com valores iguais para todas as três categorias, por este motivo, utilizamos os mesmos parâmetros.

O Sistema de Equações (1) é o mais simplificado, para este modelo da Tuberculose. Ao realizarmos as substituições relativas ao produto β. T_i(t), obtemos o Sistema de Equações (2).

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = \pi - (\mu + p.\lambda).S(t) \\ \dfrac{dT_i(t)}{dt} = p.f.\lambda.S(t) - (\mu + \mu_t).T_i(t) \\ \dfrac{dT_n(t)}{dt} = p.(1-f).\lambda.S(t) - (\mu + \mu_t).T_n(t). \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = \pi - (\mu + p.\beta.T_i(t)).S(t) \\ \dfrac{dT_i(t)}{dt} = p.f.\beta.T_i(t).S(t) - (\mu + \mu_t).T_i(t) \\ \dfrac{dT_n(t)}{dt} = p.(1-f).\beta.T_i(t).S(t) - (\mu + \mu_t).T_n(t). \end{cases} \quad (2)$$

2.2 PROGRESSÃO DIRETA E INDIRETA

Na progressão direta foram apresentadas, através de um modelo SI, as categorias dos suscetíveis e dos infectados. Na progressão indireta, será introduzida a categoria dos latentes. Para este modelo da Tuberculose SLI, temos um sistema de quatro equações diferenciais ordinárias não lineares, que irão descrever a variação ao longo do tempo (t), para os grupos de indivíduos organizados em S, L, $T_i(t)$ e $T_n(t)$.

Existem duas possibilidades, quando tratamos da velocidade com que os sintomas aparecem, ou seja, o indivíduo contaminado desenvolve a doença rapidamente ou fica com o bacilo incubado, assim a doença poderá se desenvolver futuramente. Nesse caso, a tuberculose pode ser pulmonar ou não.

Gomes (2004, p. 10) reforça que,

> [...] a população total N(t) é subdividida nas seguintes categorias: indivíduos que nunca tiveram contato com o bacilo, como por exemplo, os nascidos e os que migraram, são denominados suscetíveis S(t); L(t) é a categoria dos indivíduos infectados, isto é, os que possuem o bacilo mas não desenvolvem a doença (latentes); Ti(t) a dos indivíduos que desenvolvem a tuberculose pulmonar, responsáveis pela transmissão da doença (infectantes) e Tn(t) os indivíduos que adquirem a tuberculose extrapulmonar e que não são infectantes.

Os indivíduos em estado de latência (Figura 2), que não desenvolveram a doença no primeiro ano, após serem contaminados, permanecem infectados, e apenas uma parcela (v) adquire a Tuberculose.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Neste caso, uma parcela dos indivíduos em estado de latência, (q) é associada a tuberculose pulmonar, enquanto $(1 - q)$ relaciona-se ao outro tipo de tuberculose.

Segundo Gomes (2004, p.9), “considera-se que o indivíduo possa ter sua doença detectada ou não, e caso tenha a doença notificada, pode receber tratamento e concluí-lo ou abandoná-lo [...]”. No caso de tratamento concluído, o indivíduo continua com o bacilo. Já aquele que abandona o tratamento da tuberculose pulmonar continua como um agente transmissor da doença. Além disso, uma parcela dos portadores curados, voltam a desenvolver a doença.

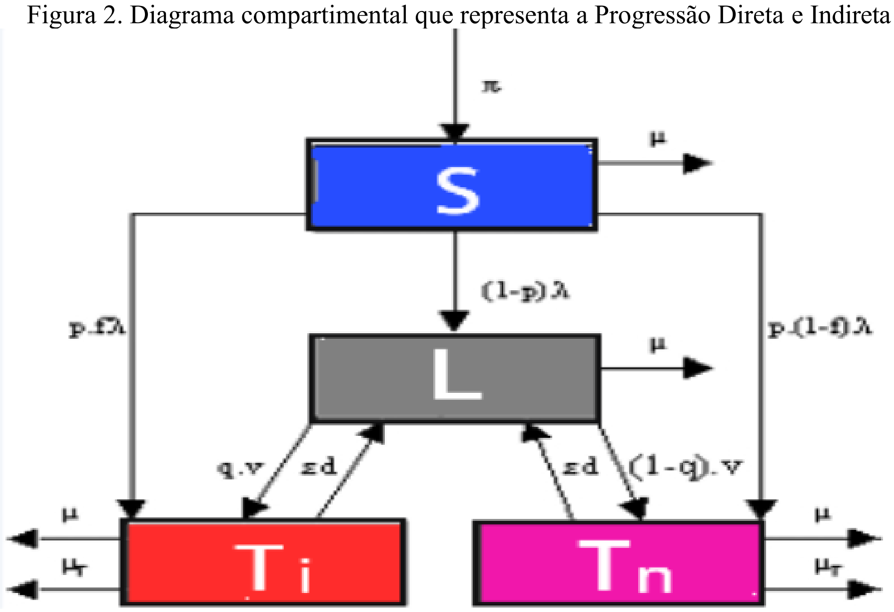
No caso de uma parcela de indivíduos terem sido diagnosticados e receberem tratamento (d), somente uma fração (ϵ) é considerada curada, sendo que a outra permanece doente. Portanto a taxa de cura (c) será obtida pelo produto de $(\epsilon.d)$. Depois da cura obtida com o tratamento, esses indivíduos são retirados do grupo dos infectados Ti(t), retornando para o grupo dos latentes, pois ainda possuem o bacilo em seus organismos.

Segundo Dye e Brian (2000 apud GOMES, 2004, p. 8), os modelos para a epidemia de tuberculose, além de considerar a progressão direta e indireta como uma das formas de transmissão, têm como principal característica a utilização do tratamento de indivíduos doentes como forma de intervenção contra a expansão da tuberculose.

Podemos concluir que apenas aumentos na taxa de nascimentos (π), causam acréscimos no grupo dos suscetíveis. Quando ocorrem aumentos na taxa de mortos por causa natural (μ) ou na taxa dos indivíduos que adquirem tuberculose em até um ano, diminuímos os valores das curvas dos suscetíveis e aumentamos a quantidade de latentes. Os acréscimos na taxa de infecção, influenciam negativamente os grupos de latentes e dos que desenvolvem a tuberculose rapidamente. Se a taxa referente aos indivíduos que desenvolvem a tuberculose pulmonar sofrer acréscimos, aumentamos este grupo e diminuímos a categoria dos que desenvolverão a tuberculose extrapulmonar. Já os aumentos na taxa dos latentes que desenvolvem algum tipo de tuberculose (v), causam acréscimos nos dois grupos, e ao aumentarmos a porcentagem de pessoas latentes que desenvolverão a tuberculose pulmonar (q), aumentamos este grupo e diminuímos os com tuberculose extrapulmonar. Os acréscimos nas mortes de qualquer tipo, reduzem as categorias dos que possuem tuberculose. O sucesso no tratamento faz com que indivíduos que adquiriram tuberculose, em algum momento, retornem ao grupo dos latentes. Observe que o somatório das expressões que se originam na categoria dos suscetíveis, direcionando-se ao grupo dos infectados ou ao grupo dos latentes, resultam em λ .

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Figura 2. Diagrama compartimental que representa a Progressão Direta e Indireta



Fonte: Autora

O Sistema de Equações (3) representa o modelo completo para este caso da Tuberculose.

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = \pi - (\mu + \lambda).S(t) \\ \dfrac{dL(t)}{dt} = (1-p).\lambda.S(t) + c.d(T_i(t) + T_n(t)) - (v + \mu).L(t) \\ \dfrac{dT_i(t)}{dt} = p.f.\lambda.S(t) + q.v.L(t) - (\mu + \mu_t + c.d).T_i(t) \\ \dfrac{dT_n(t)}{dt} = p.(1-f).\lambda.S(t) + (1-q).v.L(t) - (\mu + \mu_t + c.d).T_n(t). \end{cases} \quad (3)$$

A utilização da taxa de reprodutibilidade é fundamental na análise qualitativa de um modelo matemático. Nesse caso, (R_0^e), aparece como uma fórmula que relaciona três taxas de reprodutibilidade diferentes, caracterizadas pelas situações que podem ocorrer com indivíduos infectados neste modelo da Tuberculose.

Segundo Gomes (2004, p.15), “a taxa de reprodutibilidade é obtida a partir dos parâmetros do modelo e, tem grande importância quando se deseja propor políticas de tratamento, pois através dessa taxa pode-se obter a taxa de tratamento necessária para que se controle ou erradique uma doença [...]”.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Se a taxa de reprodutibilidade efetiva (R_0^e) for menor do que um, a doença é extinta; se for igual a um, a doença se torna endêmica e caso seja maior do que um, a propagação entre os indivíduos suscetíveis ao entrarem em contato com os infectados gera uma epidemia.

Vejamos as três taxas relacionadas como citadas em Gomes (2004): A primeira das taxas na Equação (4) ocorre por progressão direta (R_0^{pd}) e relaciona-se aos suscetíveis que ficaram doentes em até um ano após serem infectados.

$$R_0^{pd} = \frac{p.f}{\mu + \mu_t + c} \qquad (4)$$

Já a segunda taxa na Equação (5) acontece por uma reativação endógena (R_0^{re}) e representa os indivíduos que apesar de terem sido contaminados, não desenvolvem a tuberculose no primeiro ano após a infecção.

$$R_0^{re} = \frac{q.v(1-p)}{(v+\mu)(\mu + \mu_t + c) - c.v} \qquad (5)$$

A terceira taxa (R_0^r) na Equação (6) está relacionada aos indivíduos curados que voltam a desenvolver a tuberculose, ou seja, são casos de recidiva.

$$R_0^r = \frac{q.v(c.p)}{[(v+\mu)(\mu + \mu_t + c) - c.v](\mu + \mu_t + c)} \qquad (6)$$

Portanto, a taxa de reprodutibilidade efetiva (R_0^e) tem grande importância na análise qualitativa deste modelo. Ela pode ser obtida, através da expressão na Equação (7) que relaciona as três taxas.

$$R_0^e = \frac{\beta.\pi.\left(R_0^{pd} + R_0^{re} + R_0^{r}\right)}{\mu} \qquad (7)$$

2.2.1 Simulações

Utilizamos o software Scratch para o cálculo das taxas de reprodutibilidade e o Octave para construção dos gráficos. Para iniciarmos as simulações, utilizamos as condições iniciais: Suscetíveis ($S(0)$ = 99,99%); Latentes ($Li(0) = 0$); Tuberculose pulmonar ($Ti(0)$ = 0.01%); Tuberculose extrapulmonar ($T_n(0) = 0$). Tomamos como parâmetros: ($\pi = 0.01$); ($\mu = 0.02$); ($\beta = 0.0001$); ($p = 0.6$); ($\nu = 0.05$); ($q = 0.7$); ($f = 0.8$); ($\mu t = 0.05$) e ($c = 0.1$).

Observe que estamos propondo, pelo menos inicialmente, que a parcela de indivíduos que terão sucesso no tratamento c, será maior que a taxa de contágio β. Neste caso, a doença é extinta pois (R_0^e) é menor do que um, como pode ser visualizado na (Figura 3).

Figura 3. Taxas de Reprodutibilidade

Fonte: Autora

Caso a taxa de contágio (β) tornar-se igual 0.001, a doença também é extinta, pois (R_0^e) será menor do que um, obedecendo aos resultados da (Figura 3). O gráfico desta simulação, apresenta um paulatino decrescimento dos suscetíveis até atingir 50%, enquanto as porcentagens relativas às outras classes são nulas. Observe que estamos considerando a unidade de tempo em anos, já que a forma rápida da doença se desenvolve em até um ano e a forma lenta após este período.

Agora, mantendo ($\beta = 0.001$) e aumentando a taxa referente às pessoas que desenvolvem a tuberculose em até um ano, ou seja, assumindo ($p = 0.9$), podemos perceber que (R_0^{pd}), (R_0^{r}), (R_0^{e})

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

sofrem acréscimos, exceto na taxa por reativação endógena (R_0^{re}), que sofreu uma redução. A fórmula da taxa de reativação endógena depende da taxa (1-p), que sofreu uma diminuição. O que significa que qualquer alteração na porcentagem correspondente aos indivíduos que adquirem a tuberculose em até um ano, influencia em todas as taxas de reprodutibilidade, como pode ser visto na (Figura 4).

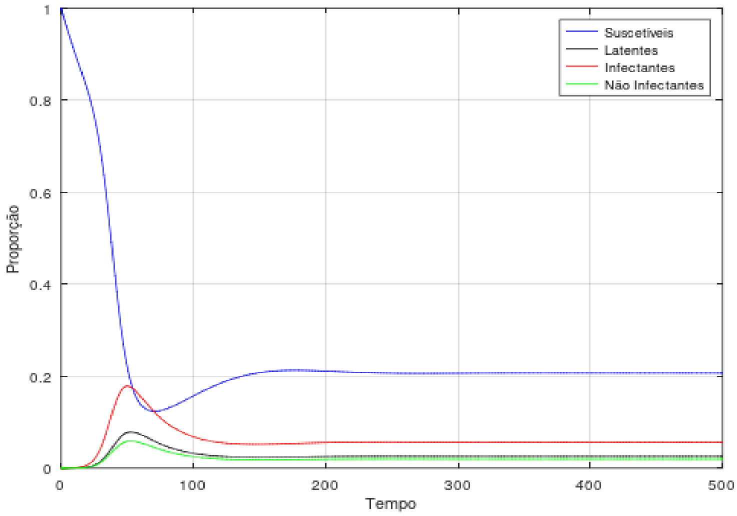
Figura 4. Taxas de Reprodutibilidade

Fonte: Autora

Se mantivermos (p = 0.9) e aumentarmos a taxa (ν) dos latentes que desenvolvem a tuberculose para 0.3 e a taxa (β) para 0.5, temos o gráfico na (Figura 5). Nesse caso, começamos a propor que a taxa de contágio, seja maior que a porcentagem de pessoas que obtém sucesso no tratamento. Com isso, a doença se agrava e pode se tornar uma epidemia.

Com relação as taxas, temos que (R_0^{pd}) mantém o resultado constante da simulação anterior, pois só alteramos (ν) e (β), já as demais taxas de reprodutibilidade aumentam. Temos nesta simulação, um exemplo que gera uma situação grave, pois (R_0^{e}) torna-se maior que 1, como pode ser visto na (Figura 6).

Figura 5. Evolução temporal da Tuberculose- Progressão Direta e Indireta



Fonte: Autora

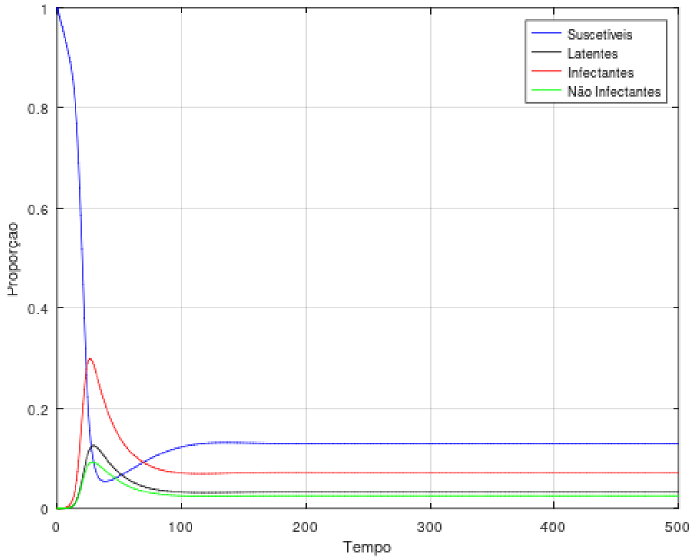
Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Figura 6. Taxas de Reprodutibilidade

Fonte: Autora

Imagine se tivéssemos considerado (β = 0.8), teríamos uma situação ainda mais grave. Observe o gráfico na (Figura 7).

Figura 7. Evolução temporal da Tuberculose- Progressão Direta e Indireta

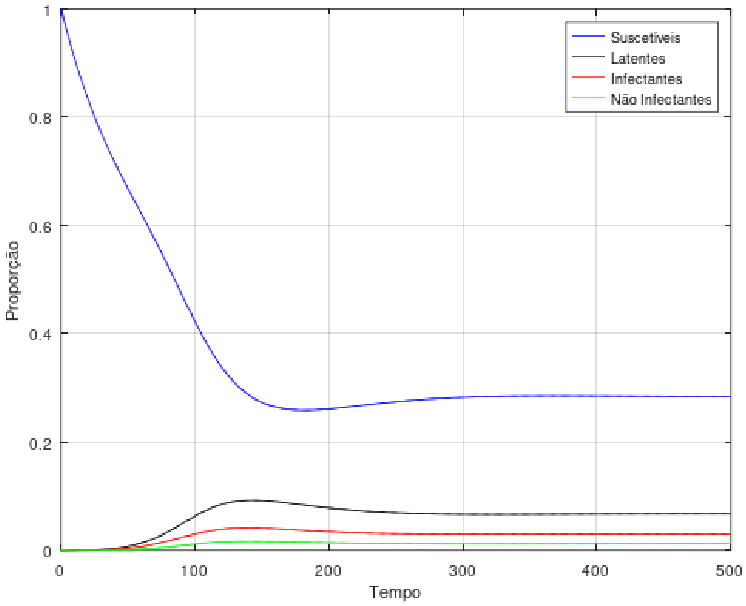


Fonte: Autora

Quando mantemos (p = 0.9), (ν = 0.3) e aumentamos (c) que se refere aos indivíduos com tuberculose que tiveram sucesso no tratamento para 0.5 e igualamos (β) a (c), a situação começa a melhorar. Com isso, a curva dos latentes supera a dos infectados, como pode ser observado na (Figura 8). A porcentagem de suscetíveis se estabiliza em 20% aproximadamente, 7% de latentes, 3% de infectantes e 2% de não infectantes.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

Figura 8. Evolução temporal da Tuberculose- Progressão Direta e Indireta



Fonte: Autora

Observando as taxas da (Figura 9), podemos perceber que as taxas (R_0^{pd}) e (R_0^{re}) sofrem redução pois indivíduos curados com o tratamento, estão se deslocando da categoria dos doentes para a categoria dos latentes. Já a taxa (R_0^{r}), aumenta, pois existem mais indivíduos latentes, que poderão voltar a desenvolver a doença. Como igualamos a taxa de contaminação e a taxa de sucesso no tratamento, conseguimos diminuir (R_0^{e}).

Figura 9. Taxas de Reprodutibilidade

Fonte: Autora

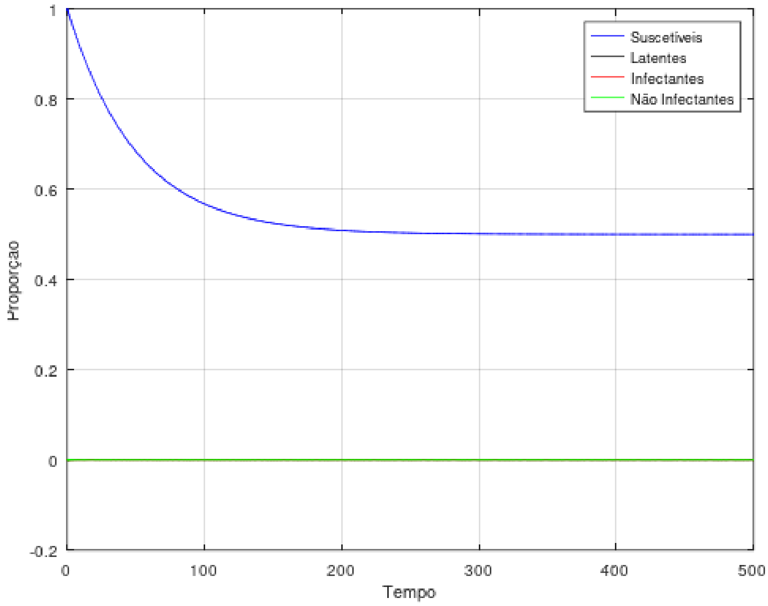
Agora, vamos manter ($\beta = 0.5$), pelo menos a princípio, porém, passaremos a taxa (c) para 0.9, o que indica que será aplicado um tratamento mais eficaz que terá sucesso em uma grande parcela de indivíduos. Além disso, vamos diminuir a taxa (ν) para 0.05, valor utilizado em simulações iniciais. Obtemos, portanto as taxas de reprodutibilidade que sofreram reduções na (Figura 10), assim como o gráfico na (Figura 11). Conseguimos obter uma taxa de reprodutibilidade efetiva menor que 1 e a doença poderá ser extinta.

ISSN: 2358-2472

Figura 10. Taxas de Reprodutibilidade

Fonte: Autora

Figura 11. Evolução temporal da Tuberculose- Progressão Direta e Indireta



Fonte: Autora

De acordo com Dye et al (1998 apud GOMES, 2004, p. 8), considera-se nesse modelo que os indivíduos suscetíveis podem adquirir imunidade ao bacilo através da vacinação podendo ao longo dos anos perder essa imunidade e ficar novamente suscetível ao bacilo. Assume-se no modelo proposto que indivíduos que desenvolvem a tuberculose podem ser curados naturalmente ou por tratamento.

Agora, imagine se introduzíssemos uma vacina para este mesmo modelo da Tuberculose, tornando-o SLIRV. Com isso, estaríamos incluindo mais duas categorias, a dos recuperados e a dos vacinados. O que estamos tratando é de outra possibilidade, onde os indivíduos que desenvolvessem a tuberculose, pudessem conseguir a imunização, sem retornar ao grupo dos latentes.

3 RESULTADOS

Foram feitas simulações relativas à progressão direta, porém só apresentamos neste artigo, os resultados obtidos com o modelo completo. Quando tentamos aumentar na forma direta, a taxa

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

referente àqueles que adquirem a tuberculose de forma rápida (p), aumentamos o grupo das pessoas com tuberculose pulmonar e a dos com a extrapulmonar, e diminuímos os suscetíveis que poderiam tornar-se latentes, desenvolvendo a doença após um ano. Ao realizarmos a operação inversa, a de diminuir (p), não conseguimos diminuir o valor máximo obtido na curva dos indivíduos com tuberculose pulmonar, pois estávamos considerando uma taxa (f=0.7), o que influenciou no crescimento deste grupo e no crescimento inferior dos indivíduos na categoria dos com tuberculose extrapulmonar, já que dependiam da parcela (1-f).

Quando diminuímos a taxa (f) e mantemos (p) com um valor pequeno, reduzimos a porcentagem máxima de indivíduos com tuberculose pulmonar e aumentamos a porcentagem daqueles que possuem tuberculose extrapulmonar. Percebemos que se conseguirmos diminuir a porcentagem de indivíduos que desenvolvem tuberculose de forma rápida (p) e a parcela (f) da tuberculose pulmonar, teremos uma redução proporcionalmente significativa na quantidade máxima atingida por $T_i(t)$ e um acréscimo proporcional em $T_n(t)$. Com isso, aumentaremos a quantidade de indivíduos pertencentes a categoria dos suscetíveis, que poderão vir a integrar a classe dos latentes.

Ao reduzirmos a taxa de contágio (β), conseguimos aumentar a quantidade de suscetíveis, porém o valor máximo de indivíduos com tuberculose pulmonar e extrapulmonar aumentaram. Isso aconteceu porque a taxa de infecção, não depende só da taxa de contágio, mas também dos valores de T_i (t). Se a quantidade de pessoas com tuberculose pulmonar, atingir valores muitos altos, não adiantará só diminuir a taxa de contágio, pois não conseguiremos, só com essa atitude, diminuir o grupo de infectados.

Nas progressões direta e indireta, começamos a considerar situações em que a doença não representava um problema, pois mesmo depois de aumentarmos consideravelmente a taxa de indivíduos que desenvolvem qualquer uma das formas de tuberculose (p), mantendo taxas com valores reduzidos para taxas como de contaminação, de latentes que desenvolvem tuberculose (v) ou de sucesso no tratamento (c), pudemos perceber que não havia nenhum crescimento de latentes nem de indivíduos com tuberculose, apenas um decrescimento de suscetíveis.

Ao aumentarmos as taxas de latentes desenvolvedores da doença e de contaminação encontramos uma situação grave. Percebemos que se aumentássemos novamente a taxa (β) a situação poderia piorar. Na tentativa de resolver o problema, supomos a aplicação de um tratamento mais eficaz, com isso aumentamos a taxa (c). Além disso, consideramos essa taxa de sucesso com o mesmo valor da taxa de contaminação. A partir disso, quanto maior fosse a taxa de sucesso no tratamento, a situação tendia a melhorar, até não haver nenhum crescimento dos agentes infectantes.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

4 OS DESAFIOS DE UM PACIENTE COM TUBERCULOSE PULMONAR

A Tuberculose gera algumas mudanças no cotidiano de um paciente, como dificuldades no relacionamento familiar, no ambiente de trabalho, na sociedade. Há uma restrição na convivência com outras pessoas, podendo ocasionar problemas psicológicos, como sentimentos de vergonha, culpa, medo da morte e de transmitir a doença para as pessoas mais próximas. São vítimas de preconceito e por isso, muitas vezes, se isolam.

De acordo com Teixeira et.al. (2023, p.4), “a confirmação diagnóstica interfere na autoimagem e na autoestima dos doentes, repercutindo nos relacionamentos interpessoais, pois o preconceito é evidente e ocasiona rejeição à pessoa do doente [...]”.

Muitos pacientes devem acreditar que a revelação do diagnóstico, pode intensificar o preconceito e gerar mais afastamento social, podendo surgir o receio de se perder amizades ou até mesmo, o emprego. A preservação do sigilo, pode ser uma opção para o paciente, com o objetivo de se resguardar do preconceito de outras pessoas. Tendo em vista o que foi exposto, imagine o quão difícil é para ele, buscar ajuda médica, já que o contato com outros indivíduos se torna necessário.

Gomes (2004, p. 4) destaca que,

> [...] a expansão da tuberculose tem como sua aliada a falsa ideia de que a doença está erradicada, sendo frequentemente confundida com outras doenças, o que faz com que os indivíduos acometidos pela moléstia frequentemente não obtenham tratamento necessário. Isso promove não só um maior comprometimento da saúde do indivíduo, como também o disseminar da doença uma vez que o indivíduo com tuberculose pode ser uma possível fonte de disseminação.

De acordo com Penna (1994), a persistência bacteriana é responsável por recaídas da doença, exigindo um tratamento prolongado, para não prejudicar toda a estratégia de controle e tornar o arsenal terapêutico existente ineficaz. Segundo Teixeira (2023 apud GAMA et.al., 2019, p. 4), o imaginário sobre a TB é o de uma doença separatista, que toma vulto na atualidade, mesmo com os avanços biomédicos no que tange ao tratamento e à cura.

O abandono do tratamento pode ser reflexo dessas dificuldades enfrentadas por esses pacientes, que preferem ficar isolados, perdendo a chance de uma “cura medicamentosa”. Há casos em que o paciente consegue se reestabelecer com tratamentos naturais. Observe que essa “cura” pode conduzi-lo de volta ao grupo dos latentes, podendo desenvolver a doença novamente.

Gomes (2004, p. 4 e 5) ainda destaca que,

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

> [...] uma vez tratada a tuberculose tem cura. Um dos maiores problemas no combate à doença está relacionado ao abandono do tratamento, que é uma das maiores preocupações em nível mundial. A quimioterapia tem duração mínima de 6 meses, e um mês após o início do tratamento o indivíduo tem a falsa sensação de estar curado e frequentemente abandona esse tratamento, continuando a ser transmissor da tuberculose, no caso da tuberculose pulmonar, ou adquirindo a tuberculose resistente aos medicamentos. Quanto maior for o índice de abandono maiores serão as possibilidades de que se tenham indivíduos acometidos pela tuberculose resistente aos medicamentos, dificultando ainda mais o tratamento e cura desses indivíduos e que passem a ser agentes transmissores desse tipo de tuberculose.

Segundo declaração da OMS (1997 apud GOMES, 2004, p. 5), a melhor intervenção no combate `a tuberculose é o tratamento supervisionado ou Tratamento Diretamente Observado (DOT), que compreende a notificação de casos e o acompanhamento dos doentes na ingestão de medicamentos, garantindo a conclusão desse tratamento.

5 CONCLUSÃO

Nosso objetivo foi compreender um modelo básico da Tuberculose, para então termos condições de aprofundar nossos estudos, por isso, propomos uma revisitação ao passado, tomando por base conhecimentos matemáticos já adquiridos por estudiosos. A modelagem matemática através de seus pesquisadores, busca por soluções para os problemas da atualidade, mas para isso, há que se fazer um resgate, daquilo que já foi implementado por outros, para assim, podermos prosseguir.

Por meio da modelagem matemática, é possível criar uma visão clara e organizada de situações no presente ou no futuro, causadas pelas doenças, em particular pela Tuberculose, o que facilita a compreensão e a análise das informações. Quando além de leitores somos pesquisadores, aumentamos a chance de solucionar um problema, a partir daquilo que já experimentamos ou que outros já vivenciaram, por isso, devemos registrar os nossos estudos, para que as gerações posteriores, possam ter acesso.

Esses modelos básicos, utilizam sistemas de equações diferenciais ordinárias não lineares, assunto do Ensino Superior para resolver o problema da Tuberculose, descrevendo a dinâmica de propagação, mas de uma forma simplificada, com isso, temos condições de aprimorar os nossos estudos, avançando para sistemas mais complexos. Que possamos ser capazes de estimar o número de casos por período e a avaliar estratégias de controle, para serem implementadas em nossas simulações. O que se espera com este artigo é a construção de uma proposta já implementada, para a Tuberculose em anos anteriores e que seja acessível as pessoas na atualidade.

Esperamos que esse modelo básico, possa contribuir para a reflexão sobre o tema, bem como para a orientação ou direcionamento das ações. Esperamos despertar o desejo de estudar a Modelagem Matemática, contribuindo com a formulação de novos modelos.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

AGRADECIMENTOS

Á Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ) e ao meu orientador do PPGMMC, Carlos Andrés Reyna Vera Tudela.

Revista ARACÊ
ISSN: 2358-2472

REFERÊNCIAS

DYE, Christopher.; WILLIAMS, Brian. **Criteria for the control of drug resistant tuberculosis**. In Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America (PNAS2002), v. 97, p. 8180–8185, 2000.

DYE, Christopher. et al. **Prospects for worldwide tuberculosis control under the whodots strategy.** Lancet 352, p. 1886–1891, 1998.

FUNDAÇÃO NACIONAL DE SAÚDE. **Plano nacional de controle da tuberculose**. Ministério da Saúde. 1999.

GAMA, Kamila Nancy Gonçalves da. et.al. **O impacto do diagnóstico da tuberculose mediante suas representações sociais**. Revista Brasileira de Enfermagem, v.72, n.5, p.1254-1261, 2019.

GOMES, Patricia Dias. **Um modelo matemático para a epidemia de tuberculose.** Universidade Federal Fluninense. 2004.

ORGANIZAÇÃO MUNDIAL DA SAÚDE (OMS). **Treatment of tuberculosis: guidelines for national programmes**. 2ª edição. Genebra: OMS, 1997.

PENNA, Maria Lúcia Fernandes. **Dinâmica Epidemiológica da Tuberculose**. Faculdade de Saúde Pública da Universidade de São Paulo. 1994.

QUADROS, Alessandra Sena. **Modelos epidemiológicos para propagação de informação**. Universidade Federal do Rio de Janeiro. 2013.

TEIXEIRA, Lucas Miléo. et.al. **Concepções sobre tratamento e diagnóstico da tuberculose pulmonar para quem a vivencia**. Universidade do Estado do Pará. 2023.

TELES, Pedro. **Modelos compartimentais e aplicações**. Revista Ciência Elementar, v. 8, n. 2. 2020.